

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОВИСАНИЯ ВЕРЁВКИ

Разработанная авторами методика построения полуэмпирических моделей сложных объектов применяется к моделированию свободно провисающей верёвки на основе приближённого дифференциального уравнения и экспериментальных данных.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, приближенное решение, многослойное решение, полуэмпирическая модель, экспериментальные данные, уточнение модели.

В статье рассматривается задача расчёта линии провисания пеньковой верёвки, которую трудно решить стандартными методами. Мы будем строить полуэмпирическую модель объекта, опираясь на данные наблюдений за ним, используя методы [1-4].

На рис.1 изображена расчетная схема свободно свисающую нерастяжимой нити длиной $l=1\text{м.}$, закрепленную концами на одинаковом уровне. Здесь и далее L – расстояние между опорами, s – длина участка кривой, θ – угол наклона касательной, A и B – векторы сил реакций опор, q – распределенная нагрузка, $z = \frac{s}{l}$.

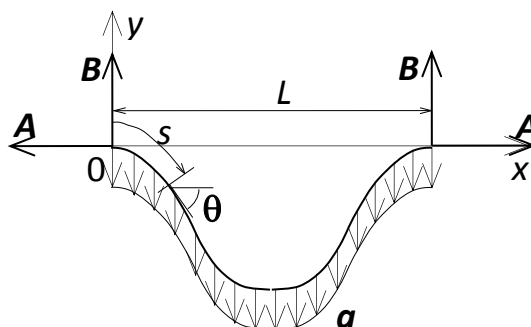


рис.1 расчетная схема нити

Для отыскания уравнения кривой для свободно свисающей нити достаточно определить функцию $\theta(z)$. В обозначениях $\xi = \frac{x}{l}$ и $\eta = \frac{y}{l}$

$$\frac{d\xi}{dz} = \cos\theta(z), \frac{d\eta}{dz} = \sin\theta(z) \quad (1)$$

Наш подход состоит из двух этапов. На первом строится приближённое решение рассматриваемых дифференциальных уравнений в виде функции. На втором этапе эта функция уточняется по наблюдениям.

Для учета изгибной жесткости воспользуемся уравнением

$$EJ \frac{d^2\theta}{ds^2} = (B - qs)\cos\theta + A\sin\theta \quad (2)$$

с граничными условиями: $\theta(0) = 0$, $\theta(l) = 0$ и системой уравнений (1).

Уравнение (2) преобразуем к виду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -a t \cos\theta + b \sin\theta \quad (3)$$

Уравнение (3) дополняется краевыми условиями $\theta(0) = \theta(1) = 0$.

Далее используется один из вариантов многослойного подхода к построению приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений [1-4].

Первый шаг делаем по исправленному методу Эйлера для промежутка переменной длины. Второй - по методу Штёрмера для такого же промежутка.

Уравнения для координат линии получим интегрированием (1) с помощью метода Симпсона

$$x(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left(1 + \cos \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \cos \theta\left(\frac{s}{2m}(2i-1), \mathbf{a}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \cos \theta\left(\frac{s}{m}i, \mathbf{a}\right) \right);$$

$$y(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left(\sin \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \sin \theta\left(\frac{s}{2m}(2i-1), \mathbf{a}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin \theta\left(\frac{s}{m}i, \mathbf{a}\right) \right).$$

Идентификацию параметров a , b и c проводим минимизацией функционала ошибки $J = \sum_{i=1}^M (x(s_i, \mathbf{a}) - x_i)^2 + \sum_{i=1}^M (y(s_i, \mathbf{a}) - y_i)^2$, включающего данные наблюдений $\{x_i, y_i\}_{i=1}^M$.

Идентифицируя параметры a , b и c , при $L=0.1$ м получаем следующий график:

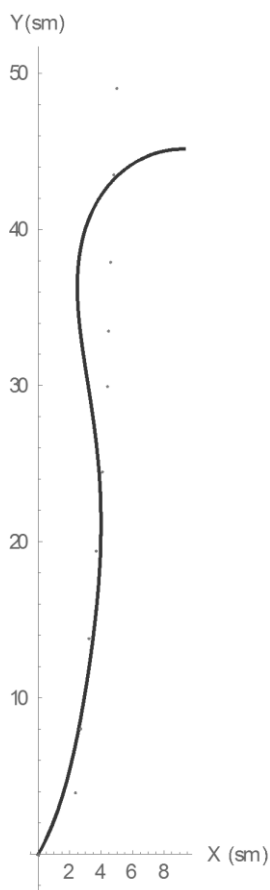


рис.2 График провисания нити при L=0,1 м

Заметим, что никакой подбор коэффициентов уравнения (2) не позволяет получить решение также или лучше соответствующее экспериментальным данным. Методы, изложенные в [1-4] и в данной работе имеет смысл применять для быстрого построения математической модели приемлемой точности при не самом удачном выборе физической модели и соответствующих ей дифференциальных уравнений за счет подбора настраиваемых параметров для удовлетворения экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>
2. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Bolgov Ivan, Kaverzneva Tatyana, Kolesova Svetlana, Lazovskaya Tatyana, Lukinskiy Evgeniy, Petrov Alexey, Filkin Vladimir MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELS BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf> - Scopus.
3. Tarkhov Dmitry, Shershneva Ekaterina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf> - Scopus.
4. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Shemyakina Tatyana APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf>