**1. Доказать, что окружность  имеет ровно одну общую точку с графиком косинуса .**



Замечаем, что точка  является общей точкой двух кривых. Известно, что если , то , а тогда . Попытаемся решить систему двух заданных уравнений при . Подставляя **** в уравнение , имеем , но , а тогда  , что противоречит тождеству . Следовательно, при  система двух уравнений не имеет решений и общих точек кривые не имеют.

**2. Функции  и  образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения  на промежутке . Доказать, что равенство  не выполняется ни в одной точке из .**

Преобразуем выражение:



,

где  – определитель Вронского, который в случае линейно независимых решений  и  не бывает равным нулю на . Следовательно,  при , или **** при **.**

**3. В квадратной матрице размером  на главной диагонали стоят чётные числа, а вне её – нечётные. Доказать, что определитель матрицы чётен при нечётном  и нечётен при чётном .**

Если элемент целочисленной квадратной матрицы  изменить путём добавления или вычитания чётного числа , то её определитель изменится на величину , где  – алгебраическое дополнение элемента  (это очевидно из разложения определителя по -й строке или по -му столбцу). Следовательно, чётность определителя при таком действии не изменится. Пользуясь этим, заменим все чётные числа в матрице на главной диагонали нулями, а нечетные числа вне главной диагонали – единицами. Чётность определителя при этом остаётся прежней. Чтобы вычислить полученный определитель , вычтем его первую строку из всех остальных и разложим по последней строке:





Первый из двух полученных определителей разложим по последнему столбцу, а во втором узнаём :



.

Видим, что  получается из  сменой знака и добавлением или вычитанием единицы. Смена знака на чётность не влияет, а добавление  меняет чётность на противоположную. Так как  (чётный), по индукции заключаем, что  – нечётный,  – чётный, и т. д., то есть определители нечётного порядка чётны, а чётного – нечётны. Таким же свойством обладает и определитель заданной в условии матрицы.

**4. На плоскости дан угол  величиной . Из точки на биссектрисе угла  выходит луч света под углом  к этой биссектрисе и, попадая на стороны угла  и , каждый раз отражается от них по закону «угол падения равен углу отражения». Сколько раз произойдёт отражение?**



Будем считать точку  началом координат, биссектрису угла  осью абсцисс. Пусть, для определённости, луч  проходит «выше» оси абсцисс. Обозначим  угол между направлением луча и осью абсцисс с учётом знака после -го отражения ( – до первого отражения), то есть угол  считается положительным, если направление луча получается из направления биссектрисы поворотом против часовой стрелки и отрицательным в случае поворота по часовой стрелке. Пусть  – угол, отсчитанный таким же способом до отражений, то есть либо , либо . Для определённости будем считать . Заметим, что при отражении луча света, идущего под углом , от луча  происходит его поворот по часовой стрелке на угол, равный удвоенной разности , то есть , а при отражении луча света от луча  происходит, наоборот, поворот против часовой стрелки, то есть  Легко убедиться с помощью чертежей, что эти равенства справедливы и в случае, когда угол между лучом света и отражающей его стороной угла тупой. Тогда имеем:

;

;

;

;

Видим, что  (проверяется индукцией). Заметим, что  будет уменьшаться с ростом , пока  . Прекращение отражений произойдёт тогда, когда окажется , или: , откуда . Если число  целое, то , иначе  (квадратные скобки означают целую часть числа).

Другой подход к задаче состоит в том, чтобы рассмотреть вместе с отражениями луча отражения самого угла относительно тех же его сторон. В отражённом угле луч сохранит своё направление. Из чертежа ответ становится практическим очевидным.



**5. Доказать, что ряд  сходится абсолютно.**



Обозначим  и оценим его при . Заменяя  и имея в виду, что  неотрицателен, имеем: , , , и тогда

.

В первом из двух интегралов сделаем замену  и переобозначим переменную интегрирования:

.

Тогда:







.

Оценим эту величину по модулю при , учитывая, что , и пользуясь свойствами определённого интеграла. Так как , ,

,

получим:



,

где  – число, не зависящее от . Так как ряд , или , сходится абсолютно как обобщённый гармонический ряд с показателем больше единицы, а при  то ряд  сходится по первому признаку сравнения, а тогда ряд  сходится абсолютно по определению абсолютной сходимости.

**6. Вычислить интеграл , где квадратные скобки означают целую часть числа.**

Выясним тип данного интеграла и вычислим его согласно соответствующему определению. Посколько  и , то и подавно . Подынтегральная функция на  имеет разрывы первого рода в тех точках, где  есть целое число, то есть в точках , . На промежутке  таких точек бесконечно много, но во всяком промежутке , где , количество таких точек конечно (если , то , то есть ), а тогда функция  интегрируема (по Риману) на . Всё сказанное даёт основания считать данный интеграл несобственным интегралом второго рода. Вычислим его согласно определению, то есть:

.



Подынтегральная функция в определённом интеграле имеет разрывы в точках: . Разобьём промежуток  на части имеющимися точками разрывов (разрывы на концах не имеют значения). Обозначим самую левую точку разрыва , то есть . Имеем:

.

Заметим, что на интервале  функция  постоянна и равна , а значения на концах не влияют на результат интегрирования (по Риману). Крайний левый промежуток  является частью промежутка  и в нём . Имеем:







.

Заметим, что . Поскольку , то и подавно . Поскольку  (проверяется с помощью правила Лопиталя) и, следовательно, , то, по теореме о сжатой переменной, . Тогда:

.

**7. Последовательность  задана следующим образом: ;  при . Найти пределы  и , если они существуют, или доказать их отсутствие.**

Заметим, что если число  удовлетворяет соотношению , то все члены последовательности равны , и предел её и любых её подпоследовательностей равен тому же числу. Решая уравнение , убеждаемся, что единственный его корень, лежащий в промежутке , равен  (около 0.618). В этом случае оба искомых предела равны .

Для прочих случаев обозначим  (подпоследовательность с нечётными индексами) и заметим, что . Если  и при  последовательность  является постоянной, и её предел равен соответственно 0 или 1. Покажем, что при , ,  последовательность  монотонна и ограничена.

Поскольку функция  имеет производную , положительную на , то она строго возрастающая на . Так как при этом  и , то  и , то есть члены последовательности  никогда не выйдут за пределы промежутка  при . Последовательность  ограничена числами 0 и 1.



Рассмотрим разность соседних членов последовательности  и изучим её знак. Введём функцию , которая имеет корни 0, 1 и  (ещё один корень  лежит за пределами  с правой стороны). Исследуя её на знак методом интервалов, получаем, что она отрицательна на  и положительна на . Рассмотрим случай, когда . Поскольку , то и  (и, следовательно,  тоже), а тогда и  и , и так далее – для всех , . Последовательность  – убывающая. Аналогично доказывается, что  – возрастающая при . Монотонность доказана.

Из монотонности и ограниченности следует существование конечного предела . Найдём его. Переходя к пределу при  в равенстве , получаем уравнение , корни которого такие же, как и у функции , то есть 0, 1 и . Если , то ; по теореме о предельном переходе в неравенстве, ; из возможных значений предела  этому условию удовлетворяет только 0. Аналогично, при ,  и, следовательно, равен 1.

Что касается предела последовательности чётных членов то имеем:

.

Подытоживая сказанное с учётом последнего соотношения и вышеупомянутых тривиальных случаев, получаем ответ:

* Если , то .
* Если , то  и .
* Если , то  и .



**8. Найти множество всех точек плоскости, лежащих на всевозможных единичных отрезках, у которых один конец лежит на оси , а второй – на оси *.* Ответ представить в форме неравенств или уравнений относительно координат.**



Ясно, что искомая фигура состоит из точек с координатами  и , лежащими в промежутке , и что эта фигура симметрична относительно осей координат (если точка лежит на единичном отрезке с концами на осях  и , то симметричная ей точка относительно любой оси лежат на отрезке, симметричном исходному относительно той же оси). Фигура включает четыре единичных отрезка, имеющих один конец в начале координат и второй конец в точках , , , . Прочие рассматриваемые отрезки не лежат на осях координат и могут быть описаны уравнениями вида , где  и  – ненулевые координаты их концов. Поскольку длина каждого такого отрезка (то есть расстояние между точками  и ) равна единице, то получаем .

Сначала рассмотрим часть фигуры в первом квадранте (точки удовлетворяют условиям , ). Единичный отрезок с концами на положительных полуосях  и  задаётся уравнением , где , , , . Поскольку  и , имеем , а тогда уравнение единичного отрезка примет вид , откуда . Зафиксируем произвольный  и найдём множество возможных значений выражения  при всевозможных значениях . Видим, что . Вычисляя и упрощая производную , получим:



.

Стандартным образом исследуя функцию  на монотонность по переменной  по знакам производной, обнаруживаем, что она возрастает на интервале  и убывает на , достигая максимума в точке . Этот максимум является и наибольшим значением  на . Таким образом, при фиксированном  наибольшее возможное значение  для точек на единичных отрезках с концами на осях равно:



.

В силу непрерывности функции  и её нулевых значений на концах промежутка , ординаты точек, лежащих на единичных отрезках с концами на осях координат в первом квадранте, принимают при фиксированном  и все возможные значения из промежутка  (теорема о промежуточном значении). Таким образом, при произвольном  имеем , или , или . Это неравенство задаёт множество искомых точек в первом квадранте, но в силу симметрии фигуры относительно осей координат и чётности входящих в неравенство функций по  и по  оно имеет такой же вид и в других квадрантах. При  и при  оно правильно задаёт единичные отрезки, лежащие на осях  и  соответственно. Таким образом, ответ имеет вид:

.