**1. Даны некомпланарные геометрические векторы , образующие правую тройку. Объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен *V*. Построим векторы для. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах  и выяснить, образуют ли они правую или левую тройку.**

Обозначим через  смешанное произведение векторов  при . Заметим, что  (с положительным знаком, так как тройка правая). Имеем:



.

Следовательно, числа  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем . Так как , то , . В частности, . Поскольку , векторы  образуют левую тройку, а объём построенного на них параллелепипеда равен .

**2. Пусть  непрерывна на промежутке  и дифференцируема внутри него. Доказать, что найдётся точка  такая, что .**

Рассмотрим функцию , которая определена  и дифференцируема внутри него. Поскольку , функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует  такое, что . Имеем:

.

В точке  получим: , откуда ****.

**3. Доказать, что  при любом .**

*x*

*y*

*O*

1

1

-1



*x*

*y*

*O*

0.05

1



В силу чётности входящих в неравенство функций достаточно доказать неравенство при . Имеем:

.

Видим, что  имеет от же знак, что и , так как  при  и обращается в нуль только при . Рассмотрим функцию . Заметим, что . Вычислим производную и исследуем функцию на монотонность: ;  при , откуда получаем единственный на данном промежутке корень . В силу убывания косинуса на  будем иметь  при  и  при . Следовательно,  возрастает от нуля до максимума на промежутке  и убывает от максимума до нуля на . Таким образом,  при  и  при . Значит, всюду на  имеем , а тогда и , или  при всех , а в силу чётности и при .

**4. Найти предел , где  – остаток от деления  на 5.**

Заметим, что , , , . Поскольку , где  – неполное частное от деления  на 5, имеем:

,

то есть остаток  от деления  на 5 будет также и остатком от деления  на 5. Следовательно, остатки  при  периодически повторяются бесконечно много раз. Вычисляя  при , получаем результаты . Значит, последовательность  имеет вид:

.

Пусть  – произвольное натуральное число. Представим его в виде , где и  – неполное частное и остаток от деления  на 4. Тогда . Заметим, что тогда



(каждая последующая из трёх сумм содержит все слагаемые, входящие в предыдущую сумму). Так как , имеем:



.

Аналогично, . Заметим, что  как предел от произведения бесконечно малой  на ограниченную , а тогда:

,

.

Поскольку , по теореме о сжатой последовательности получаем, что .

**5. Доказать, что среди всех треугольников, вписанных в заданную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.**

Пусть  – центр окружности,  – её радиус, точки  – лежащие на окружности вершины треугольника. Обозначим , , , отсчитывая углы так, чтобы их внутренние области не пересекались; один из них может превышать .





Заметим, что  и что: , откуда . Вычислим площадь треугольника. Если ни один из углов не превышает , то:

.

Если один из углов (например, ) превышает , получим аналогичное выражение:



.

В обоих случаях:





.

Выберем и зафиксируем произвольное . Заметим, что наибольшее возможное значение  при  достигается при , то есть , , или , откуда ясно, что  (так как  и , и их разность не может достичь по модулю  при ). Следовательно, никакой треугольник с  не является треугольником с наибольшей площадью, поскольку треугольник с тем же углом  и с  имеет заведомо бóльшую площадь. Значит, треугольник с наибольшей площадью следует искать только среди треугольников, у которых . В этом случае имеем:

.

Ищем стандартным способом наибольшее значение этой функции при .Вычисляем производную:

.

Приравнивая производную к нулю, выясняем, что на интервале  она обращается в нуль в единственной точке. В самом деле,  на этом интервале положителен, а из уравнения  получаем , откуда , , но в  попадает только значение, соответствующее , то есть . Слева от этого числа в интервале  производная положительна, справа отрицательна. Значит, максимум достигается при , и он же является наибольшим значением. Тогда, поскольку  и , имеем. Видим, что все углы вписанного треугольника с наибольшей площадью равны, а тогда он равносторонний.

**6. Функции  и  определены и непрерывны на промежутке . Все их значения лежат в том же промежутке, при этом , , , . Доказать, что кривые  и  имеют хотя бы одну общую точку.**

Рассмотрим функцию . Она определена и непрерывна на  в силу непрерывности суперпозиции и суммы непрерывных функций. Заметим, что

,

,

то есть  принимает на концах  значения разных знаков. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано – Коши), найдётся  такое, что . Пусть . Тогда имеем , откуда . Видим, что точка  удовлетворяет уравнениям обеих кривых  и .

**7. Найти геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков длины , оба конца которых лежат на параболе . Ответ представить в виде уравнения.**

Пусть  и  – концы отрезка  длиной , лежащие на параболе , а  – его середина. Имеем следующие соотношения:



*  (нахождение  и  на параболе);
* ,  (так как  – середина );
*  (длина отрезка  равна ).

Исключим из этих равенств координаты концов промежутка. Преобразуем левую часть последнего равенства:







Таким образом, , откуда

.



**8. Исследовать на сходимость последовательность , если , , и  при , и найти её предел, если он существует.**

Исследуем последовательность  на монотонность. С этой целью преобразуем разность соседних членов, используя формулу разности кубов:

.

Знаменатель этого выражения строго положителен, так как числа  и  не равны нулю одновременно и при этом . Следовательно, знак разности  совпадает со знаком числителя . Так как , то имеем:

 при ,

 при ,

 при .

Заметим также, что  имеет тот же знак, что и . Имеем три случая:

1. Если , тогда для всех членов последовательности , и . Последовательность возрастает и ограничена сверху числом 2.
2. Если , тогда для всех членов последовательности , и . Последовательность убывает и ограничена снизу числом 2.
3. Если ,то , то есть все члены последовательности равны .

В случаях 1 и 2 предел последовательности существует в силу монотонности и ограниченности. Обозначим его . Переходя к пределу в равенстве  и пользуясь непрерывностью кубического корня, получаем , откуда  и . В третьем случае имеем . Таким образом, при любых  имеем .

**9. Доказать, что последовательность  имеет бесконечно малую подпоследовательность.**

Обозначим через , где , число, полученное из числа  округлением до ближайшего целого или до меньшего из двух ближайших целых (то есть ). Заметим, что всегда . Обозначим , а искомую подпоследовательность , где  – последовательность индексов. Будем строить также последовательность вещественных чисел , представляющих собой аргументы синуса , приведённые к ближайшему к нулю значению путём вычитания  из  целое число раз, и последовательность натуральных чисел .

Положим , .

Пусть , и пусть , тогда

.

Заметим, что  может быть выражено в виде алгебраической суммы целого числа и числа , умноженного на ещё одно целое число, а потому иррационально (в противном случае удалось бы выразить  в виде рациональной дроби). Значит, оно не равно нулю. Для последующих значений  поступим аналогично. Пусть , и  (откуда ), причём  по тем же соображениям, что и . Тогда:

.

Заметим, что

.

Теперь положим . Будем иметь:









откуда . Поскольку , то и , то есть  – бесконечно малая.



Идея доказательства иллюстрируется рисунками. Будем считать  полярным углом, отсчитываемым против часовой стрелки. Среди чисел  выберём такое, которое будет ближе всех , и это будет . Оно отличается от  на , причём . Тогда . Далее среди чисел  (синусы которых равны синусам чисел  в силу отличия аргументов на величины, кратные ) выберем ближайшее к . Это будет  (), и синус его будет таким же, как синус числа , и т. д. Каждое последующее  не менее чем вдвое меньше предыдущего, потому последовательность  стремится к нулю, а тогда и их синусы  стремятся к нулю при .