**Задача 1.**

**Найти , если .**

**Решение.**

****

по условию (из условия очевидно, что ). После приведения предела к полученному виду ясно, что он конечен и отличен от нуля лишь при , при этом равенство из условия задачи выполнено.

**Ответ: **

**Задача 2.**

**Пусть  – последовательность такая, что , . Доказать, что она имеет предел, и найти этот предел.**

**Решение.**

Известно (см., например, вычисление первого замечательного предела), что при  верно неравенство , поэтому (в силу монотонности функции ) верно неравенство  при . Значит, , последовательность  убывающая; она ограничена снизу нулем. По теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности, данная последовательность имеет конечный предел . Переходя к пределу в равенстве , получаем , откуда .

**Ответ:**  .

**Задача 3.**

**Функция  определена на промежутке и имеет там непрерывные производные до второго порядка включительно, причём , и  . Каково наибольшее возможное значение функции на данном промежутке?**

**Решение.**

Пусть  – точка, в которой достигается наибольшее значение,  – само наибольшее значение. Так как  существует во всех точках промежутка, в том числе в , то .

Применим к  формулу Ньютона – Лейбница: для произвольного  имеем , или , откуда, с учётом свойств определённого интеграла и условия , получим:

.

Теперь применим формулу Ньютона – Лейбница к  на промежутке :

, или ,

откуда

.

Применяя ту же формулу к  на промежутке , получим:

, или ,

откуда

.

Поскольку  неотрицательно (иначе оно не было бы наибольшим значением), имеем два соотношения для :  и . Иными словами, .

Найдём максимальное возможное значение , удовлетворяющее этому ограничению. Пусть  и  при . Непосредственной проверкой устанавливается, что  возрастает на , а  убывает на нём же. Заметим, что , откуда видно, что  при ; левее этой точки  в силу монотонности, а правее . Значит, функция  возрастает на  и убывает на  и достигает наибольшего значения при , равного .

Мы показали, что наибольшее значение функции  не превосходит . Покажем, что данное значение действительно может быть достигнуто. Для этого рассмотрим функцию, у которой . Тогда , . Из условий на концах промежутка находим, что  и . Таким образом, , ; точка экстремума , и в ней . Значение достигнуто.

**Ответ:** .

**Задача 4.**

**Функция  определена на  и монотонно не возрастает (т. е.  при ). Доказать, что для любого  .**

**Решение.**

Заметим, что данная функция интегрируема на отрезке  в силу монотонности. Применяя интегральную теорему о среднем, получим , в силу того, что функция не возрастает. Аналогично, . Из полученных неравенств следует: , то есть .

**Задача 5.**

**Окружность единичного радиуса катится по верхней стороне положительной ветви гиперболы . Будет ли линия, которую описывает центр окружности, ветвью какой-либо гиперболы?**

**Решение.**

Составим параметрические уравнения исследуем линии. В качестве параметра возьмем  – абсциссу той точки  исходной гиперболы, в которой окружность радиуса 1 касается гиперболы. Касательный вектор к исходной гиперболе имеет вид  , перпендикулярный ему единичный вектор  (его координаты положительны, он направлен «вправо» и «вверх» от точки касания гиперболы и окружности к центру единичной окружности). Сложив радиус-вектор выбранной точки на гиперболе c вектором , получим радиус-вектор центра той единичной окружности из условия, которая соответствует данному значению . Таким образом получаем зависимость координат центра окружности от , это и есть параметрические уравнения исследуемой линии:

 ,  .

Чтобы понять, является ли кривая, заданная этими уравнениями, ветвью какой-либо гиперболы, найдем асимптоты этой кривой. Поскольку при  имеем , а  , то прямая  – вертикальная асимптота кривой. Поскольку при  выполняется  , а  , то прямая  – горизонтальная асимптота полученной кривой. Если данная кривая была бы ветвью гиперболы с указанными асимптотами, параллельными координатным осям, (и с центром в точке ), то эта гипербола оказалась бы полученной из исходной гиперболы параллельным переносом на вектор и, возможно, растяжением или сжатием. Уравнение такой гиперболы имеет вид. Возьмем точку исследуемой кривой  (в параметрические уравнения подставили  ). Для данной точки . Возьмем точку исследуемой кривой  (в параметрические уравнения подставили  ). Для данной точки  Значит, линия, описанная центрами окружностей из условия задачи, не является ветвью гиперболы.

**Задача 6.**

**Пусть  – множество матриц размера  с действительными коэффициентами,  – след матрицы . Доказать, что если  для всех , то .**

**Решение.**

Пронумеруем элементы произвольной квадратной матрицы  и запишем **** согласно определениям произведения матриц и следа матрицы:

**.**

Докажем, что все элементы матрицы  нулевые, от противного. Пусть для некоторой пары индексов  элемент . Возьмем такую матрицу ****, у которой элемент  , а все остальные элементы нулевые. Тогда по написанной выше формуле ****, что противоречит условию задачи.

**Задача 7**.

**Доказать, что если при любом   не более чем в миллионе точек , то , за исключением не более чем 500000 точек .**

**Решение.**

Покажем сначала, что для любого конечного количества чисел  существует такое число  (достаточно большое), что при всех  и при всех  будет верно  – число, не зависящее ни от , ни от выбора значения  из данного набора чисел. Действительно, рассмотрим последовательность . По условию,  лишь в конечном числе точек вида , поэтому найдется такое число , что при всех  будет .

Возьмем другую точку , рассуждая аналогично, найдем  такое, что при всех  будет . Проверим от противного, что при всех  будет , где . Действительно, иначе существуют сколь угодно большие  такие, что , что противоречит условию задачи для .

Продолжая рассуждать так же для точек , видим, что  при всех достаточно больших  и всех значениях  из данного конечного набора чисел.

Возьмем теперь любое число  и найдем для него константу  ( при всех достаточно больших ). Рассмотрим множество чисел .

Имеются две возможности: множество E бесконечно либо множество E конечно.

Покажем от противного, что оно конечно. Предположим, что множество E бесконечно. Выберем из него миллион и одну точку , рассмотрим набор точек  (точка  выбрана выше) и найдем для данного набора точек натуральное число N, как описано выше. Возьмем и зафиксируем , тогда для  нарушается условие задачи, поскольку для 1000001 точки окажется , то есть .

Таким образом, множество E конечно. Осталось убедиться, что оно содержит не более 500000 точек. Пронумеруем все точки E: . Поскольку их конечное количество, можно выбрать такое число , чтобы . Тогда , откуда по условию задачи , то есть .

**Задача 8**.

**Что больше,  или ?**

**Решение.**

Используем очевидное неравенство  (верно для любых чисел ).

Применим его к парам сомножителей произведения чисел из условия задачи: к первому и 25-му сомножителю, ко второму и 24-му и т.д. В произведении нечетное количество (25) сомножителей, средний ( ) останется без пары. Тогда получаем:

**** (после оценки используем формулу бинома Ньютона).

Сумма ****, поскольку она начинается с отрицательного слагаемого и модули слагаемых (с ростом k) убывают: **** (при

**** это очевидно выполнено, а, значит, при  тем более).

Поэтому, продолжая оценку произведения, имеем

**.**

Непосредственным вычислением убеждаемся, что эта оценка меньше ½.

**Ответ: .**