**Задача 1.**

**На гиперболе  взяты точки  и  с абсциссами  и  (). Обозначим  центр окружности, проходящей через точки ,  и вершину гиперболы. Найти предел  при .**

**Решение.**

Отметим сразу, что в условии не указано, какая из двух вершин гиперболы является точкой окружности, поэтому следует рассмотреть оба возможных случая. Кроме того, в любом случае, центр окружности  имеет координаты , поскольку он лежит на серединном перпендикуляре отрезка , то есть на прямой .

Случай 1. Окружности проходят через вершину гиперболы . Напишем уравнение серединного перпендикуляра отрезка  и найдем точку его пересечения с прямой . Эта точка и есть .

Середина отрезка  – точка . Вектор  является нормальным для серединного перпендикуляра отрезка . Пишем уравнение прямой с нормальным вектором , проходящей через точку :

.

Полагая в этом уравнении , находим . Очевидно, , поэтому  ( – последовательность точек плоскости, то есть двумерная вещественная последовательность!) Геометрически полученный результат легко представить так: в случае 1 предельным положением рассматриваемых окружностей при  является окружность с центром  и радиусом , которая касается гиперболы **** в ее вершине . (*Легко убедиться, что  – радиус кривизны гиперболы в ее вершине . Те, кто не изучал это понятие, могут прочитать о нем самостоятельно.*).

Случай 2. Окружности проходят через вершину гиперболы . Производя вычисления, полностью аналогичные сделанным в случае 1, лишь с заменой точки  точкой , найдем , откуда видим, что . Геометрический смысл полученного результата: в случае 2 предельным положением рассматриваемых окружностей при  является окружность с центром  и радиусом , которая касается гиперболы **** в ее вершине  (а значит, и в вершине , то есть окружность «зажата» между ветвями гиперболы).

**Ответ:**  в случае рассмотрения вершины гиперболы ;  в случае рассмотрения вершины гиперболы .

**Задача 2.**

**Пусть  бесконечно дифференцируема на интервале , и пусть последовательность  сходится равномерно на . Пусть .**

**Найти .**

**Решение.**

Обозначим предельную функцию данной функциональной последовательности ;  равномерно сходится к  на . В силу равномерной сходимости последовательности и непрерывности производных **** можно интегрировать последовательность почленно под знаком предела: для любого числа  верно равенство , то есть . Поскольку функция *g*(*t*), очевидно, непрерывна на  как равномерный предел последовательности непрерывных функций, интеграл в левой части дифференцируем по переменному пределу интегрирования. Поскольку последовательность  состоит из непрерывных функций и сходится равномерно, то и  непрерывно дифференцируема на . Дифференцируя равенство , имеем , по условию ****. Решением полученной задачи Коши для дифференциального уравнения  является функция .

**Ответ: .**

**Задача 3.**

**Вычислить интеграл , где  – положительно определённая квадратичная форма, а – область .**

**Решение.**

Обозначим искомый интеграл ****. Существует ортогональная замена переменных , приводящая квадратичную форму к каноническому виду . Якобиан этой замены , а коэффициенты  – это собственные числа матрицы , они положительны, в силу положительной определенности квадратичной формы. По теореме о замене переменных в кратном интеграле имеем: , где область интегрирования.

Сделаем теперь замену переменных , ее якобиан ; в результате замены получим  , где область интегрирования.

Сделаем, наконец, такую обобщенную полярную замену: . Ее якобиан . В результате получим

 .

**Ответ: .**

**Задача 4.**

**Доказать равенство: .**

**Решение.**

При  функция  определена и . Из равномерной сходимости экспоненциального ряда на любом конечном промежутке следует, что данный ряд равномерно сходится на отрезке , а доопределяя функцию  «по непрерывности» в точке ноль значением ее предела: , поскольку , видим, что на всем  верно записанное разложение ее в ряд. В силу равномерной сходимости ряда интегрируем почленно:

.

В интеграле  сделаем замену переменной  (поскольку исходный интеграл существует, то получившийся несобственный интеграл сходится): , где  – гамма –функция Эйлера. Поскольку , получаем .

Замечание. Равенство  может быть получено без обращения к гамма-функции (с помощью формулы понижения степени логарифма в подынтегральной функции, которую можно доказать интегрированием по частям).

**Задача 5**.

**Пусть – квадратная матрица размера ,  – единичная матрица размера , и  при некотором натуральном** *m***. Доказать, что тогда  – невырожденная матрица.**

**Решение.**

Докажем требуемое утверждение от противного. Пусть  – вырожденная матрица, тогда она имеет нулевое собственное число. Пусть  – вектор-столбец высоты  – собственный вектор матрицы , соответствующий нулевому собственному числу (по определению собственного вектора,  – ненулевой):  – нулевой столбец. Отсюда получаем , то есть  является собственным вектором матрицы , ее соответствующее собственное число . Для всякой квадратной матрицы , ее собственного вектора  и соответствующего собственного числа  верно, что 

Поэтому должно выполняться равенство , но его левая часть, в силу условия задачи, – нулевой вектор-столбец, а правая – ненулевой. Полученное противоречие доказывает утверждение.

**Задача 6.**

**Доказать, что график функции , где  и  – ненулевые вещественные числа, имеет ровно три точки перегиба.**

*Ниже приводятся два варианта решения. Автор второго варианта – участник олимпиады по математике студентов СПбПУ 2021 г., студент группы 3431102/90001 Нгуен Суан Нгок.*

**Решение (1 вариант).**

Непосредственной проверкой устанавливается, что

, .

Видим, что:

*  имеет минимум в точке  с отрицательным значением и максимум в точке  с положительным значением.
* .
*  имеет не более трёх точек перегиба, так как числитель второй производной имеет не более трёх вещественных корней, и нет точек, где вторая производная не существует или бесконечна (заметим, что степени многочленов в числителе и знаменателе второй производной можно выяснить без её полного вычисления, если разложить исходную дробь на две элементарных дроби с комплексными коэффициентами).

Покажем, что три точки перегиба действительно существуют и лежат в промежутках , ,  соответственно. Чтобы доказать наличие точки перегиба в промежутке, достаточно установить, что вторая производная на этом промежутке принимает как положительные, так и отрицательные значения – тогда в силу её непрерывности она имеет корни (в количестве не более чем конечном, как установлено выше), и хотя бы в одном из них знак второй производной должен поменяться, что будет достаточным условиям перегиба.

1. На промежутке  функция  возрастает. Пусть , тогда . Применим теорему Лагранжа к  на промежутке , получим: найдется такая точка , что . Аналогично для промежутка  имеем: найдется такая точка , что . Значит, между  и  имеется точка перегиба.
2. На промежутке  функция  убывает. Пусть , тогда . Применим теорему Лагранжа к  на промежутке , получим: , . Покажем от противного, что правее точки  найдутся точки с положительной второй производной. Допустим, что это не так и что  при . Тогда , а тогда

,

что противоречит установленному ранее . Таким образом, на  есть точки как с отрицательной, так и с положительной второй производной, а тогда есть и перегиб.

1. На промежутке  функция  убывает. Пусть , тогда . Применим теорему Лагранжа к  на промежутке , получим: , . Покажем от противного, что левее точки  найдутся точки с отрицательной второй производной. Допустим, что это не так и что  при . Тогда , или , а тогда из  следует

,

что противоречит установленному ранее . Таким образом, на  есть точки как с отрицательной, так и с положительной второй производной, а тогда есть и перегиб.

Таким образом, более трёх точек перегиба быть не может, а три найдутся всегда.

**Решение (2 вариант).**

Как и в первом варианте решения, найдем первую и вторую производные рассматриваемой функции. Рассмотрим , нам достаточно доказать, что многочлен третьей степени , стоящий в числителе , имеет три различных вещественных корня. Найдем его производную . Нули  – это точки . (Отметим, что они же – точки экстремума самой функции , как мы видели в первом варианте решения; но для дальнейшего это неважно.)

Очевидно, что , значит, найдутся точки  и . Поэтому, если мы докажем, что , то по теореме Больцано-Коши (о нуле непрерывной функции) получим, что  имеет хотя бы один корень на каждом из промежутков , и, поскольку корней у  не больше трех, задача будет решена.

Запишем в виде , разделив с остатком многочлен  на . Подставляя в это равенство точки , с учетом того, что , видим: , то есть, действительно, .

Замечание. Требование  в условии задачи несущественно, и при  доказанное утверждение верно, как и оба приведенных доказательства.

**Задача 7.**

**Доказать, что если непрерывно дифференцируемая на всей плоскости  функция  удовлетворяет уравнению , то  есть константа.**

**Решение.**

Возьмем две разные точки плоскости  и . Покажем методом от противного, что . Пусть 

Рассмотрим дифференциальное уравнение . По теореме Пеано задача Коши с произвольными начальными данными  для этого уравнения имеет решение  на всей числовой оси. Сложная функция  непрерывно дифференцируема при любом , ее производная , по условию задачи. Поэтому  (функция  переменной  постоянна, при всех  она имеет то же значение, что и при ). Тогда  и решение рассмотренной задачи Коши линейно: .

Рассуждая точно так же относительно точки , получаем, что рассмотренное дифференциальное уравнение имеет решение , причем .

Если, по предположению, , то прямые  и  имеют разные угловые коэффициенты и потому пересекаются в некоторой точке . Но тогда, поскольку точка  лежит на прямой , окажется, что ; а поскольку точка  лежит на прямой , окажется, что . Отсюда получаем, что , что противоречит предположению.

**Задача 8.**

**Найти предел , где  – решение дифференциального уравнения  при начальных условиях ,.**

**Решение.**

Если  – решение на , то , тогда , то есть , или , то есть , где постоянная находится из начальных условий и оказывается равной . Имеем: , а значит  (положительный знак перед корнем выбран в соответствии с начальным условием). Видим, что  всюду положительна, то есть  может только возрастать, откуда ясно, что  при . Видим также, что из-за возрастания  убывает  (так как функция  убывающая относительно ). Так как  ограничена снизу нулём, она имеет предел при . Мыслимы две возможности:  и .

Покажем от противного, что . Допустим, что . Тогда из соотношения  видим, что  имеет конечный предел (равный ). Возьмём . По определению предела, для взятого найдется  такое, что  окажется , откуда , или . Тогда при  имеем:

,

что противоречит существованию конечного предела . Следовательно, . Тогда .

Рассмотрим предел, для вычисления которого благодаря тому, что , применимо правило Лопиталя:



,

поскольку  при . Следовательно,

.