1 курс

**Задача 1**. Докажите, что если длина любой из сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше .

**Решение**. Рассмотрим треугольник , удовлетворяющий условию задачи. Пусть для определенности  – его наибольшая сторона. Построим равносторонний треугольник  с той же стороны от прямой , где лежит вершина . Обозначим  длину каждой стороны треугольника , по условию .



Поскольку  и , вершина  треугольника  расположена в пересечении кругов с центрами  и  радиуса  и выбранной полуплоскости, ограниченной прямой  (то есть точка  лежит в заштрихованной области на рисунке). Отсюда очевидно, что высота треугольника , опущенная из вершины  на сторону , не превосходит высоты треугольника , опущенная из вершины  на сторону ; поэтому для площадей имеем

, что и требовалось доказать.

**Задача 2**. Найдите предел последовательности , если , , .

**Решение.** Перепишем рекуррентную формулу из условия задачи в виде: . (1)

Обозначим

. (2)

Из формул (1) и (2) получаем , . Найдем общий член последовательности . Очевидно, , откуда при , с учетом формулы (2), имеем , . Заметим, что условие  не используется в решении и не влияет на ответ задачи.

**Ответ**: .

**Задача 3**. Дана квадратная матрица  порядка  ранга . Найдите максимальное количество линейно независимых решений матричного уравнения , где  – квадратная матрица порядка .

**Решение.** Любое решение матричного уравнения из условия задачи – это  элементов искомой матрицы . Эти  чисел можно представить как компоненты вектора-столбца ,  (Сначала пишем в *столбец*  все элементы первого столбца матрицы , потом – второго и т.д.) Теперь, относительно столбца неизвестных , можно записать матричное уравнение из условия задачи как однородную систему линейных алгебраических уравнений (ОСЛАУ)  с блочно-диагональной матрицей  порядка , у которой  диагональных блоков совпадают с матрицей , а все остальные элементы нулевые:

.

Очевидно, , поэтому размерность линейного пространства решений данной ОСЛАУ (подпространства ) равна .

**Ответ**: .

**Задача 4**. Даны–вещественные симметричные матрицы порядка ; все их собственные числа положительны. Докажите, что .

**Решение.** 1) Покажем, что для произвольной вещественной симметричной квадратной матрицы  порядка  с положительными собственными числами , выполняется неравенство . Действительно, известно (из теоремы о приведении квадратичной формы ортогональной заменой переменных к каноническому виду), что существует ортогональная матрица  такая, что , . По свойству определителя произведения матриц и в силу ортогональности  получаем: , поскольку все  (в полученном неравенстве для определителей равенство достигается лишь при .

2) К матрицам , поскольку они вещественные симметричные, также можно применить теорию квадратичных форм, считая  матрицами квадратичных форм  переменных. Все собственные числа матрицы  положительны, значит, существует невырожденная матрицы  такая, что  (критерий положительной определенности квадратичной формы). Отсюда, по свойству определителя произведения матриц, видим: .

Рассмотрим матрицу , она вещественная симметричная, все ее собственные числа положительны в силу закона инерции квадратичных форм. Заметим, что .

3) Рассмотрим определитель . С одной стороны,  (1)

С другой стороны, раскрывая скобки при умножении матриц под знаком определителя, получаем:

. (2)

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), далее применяя к матрице  результат п.1 нашего доказательства и заменяя, согласно п.2,  на , имеем:

, что и требовалось доказать.

**Задача 5**. Пусть , дважды дифференцируема на промежутке , и при всех  выполнены неравенства  и . Докажите, что .

**Решение.** Рассмотрим функцию . Тогда . Из условий задачи очевидно, что при всех  выполнены неравенства .

Утверждение  равносильно утверждению , покажем, что последнее равенство верно. Функция  ограничена сверху (нулём) и, поскольку , не убывает на ; поэтому существует конечный .

Теперь покажем от противного, что . Предположим, что . Значит, при всех  выполняется . Тогда для всякого значения , интегрируя неравенство  в пределах от нуля до , получим , противоречащее тому, что  на всем промежутке . Значит, , что и требовалось доказать.

**Задача 6**. Многочлен  не имеет вещественных корней. Докажите, что многочлен  не имеет вещественных корней.

**Решение.** Заметим, что, поскольку многочлен  не имеет вещественных корней, он сохраняет знак на . Поэтому многочлен  имеет тот же знак, что и сам , постоянный на всей числовой прямой, то есть также не имеет вещественных корней.

По формуле Тейлора

 ,

, отсюда находим . Многочлен, стоящий в левой части равенства, не имеет вещественных корней (доказано выше), откуда очевидно требуемое. (Заметим, что все бесконечные суммы в условии и решении этой задачи лишь формально записаны как бесконечные, на самом же деле они, очевидно, представляют собой многочлены).

**Задача 7**. Вычислите .

**Решение.** .

Во втором слагаемом сделаем замену переменной  и, вернувшись к «старому» обозначению  переменной интегрирования, получим

.

**Ответ**: ln9.