2 курс

**Задача 1**. В окружность заданного радиуса вписан *n*-угольник. Какова его максимальная площадь, при каком условии она достигается? Ответ докажите.

**Решение**.

1. Прежде всего докажем, что если вписанный в окружность *n*-угольник площади  не содержит внутри себя центр окружности, то найдется *n*-угольник площади больше, чем , вписанный в эту же окружность и содержащий внутри себя ее центр.

Если *n*-угольник  вписан в окружность так, что ее центр  не лежит внутри *n*-угольника, это значит, что одна из его сторон (на рисунке 1 это сторона ) –такая хорда окружности, что точка  лежит по одну сторону от , а сам *n*-угольник – по другую. (В крайнем случае, точка  может лежать на  – диаметре; тогда она тоже не содержится внутри *n*-угольника.)



Рис. 1

Проведем серединный перпендикуляр  отрезка  (очевидно, он проходит через точку O) и найдем точку  пересечения  с окружностью, лежащую с той стороны от , с которой лежит центр окружности . Для площадей треугольников  и  выполнено неравенство (так как, очевидно, высоты треугольников  и , опущенные на их общую сторону , связаны таким же неравенством). Поэтому площадь -угольника , содержащего внутри себя точку , больше площади исходного -угольника .

1. Из пункта 1 следует, что достаточно найти -угольник наибольшей площади среди только тех вписанных в окружность -угольников, которые содержат внутри себя центр  окружности (см. рисунок 2).



Рис. 2

Площадь -угольника  выражается формулой, где  – радиус окружности,  – углы при вершине  равнобедренных треугольников, составляющих -угольник. Далее решаем задачу на условный экстремум функции   переменных  при условии связи переменных , причем все .

Составляя функцию Лагранжа задачи на условный экстремум и применяя теорему о необходимых условиях условного экстремума, получаем систему уравнений для отыскания точек, подозрительных на условный экстремум:  (где  – множитель Лагранжа). Видим, что все значения  равны между собой, а поскольку все , то имеем . Легко убедиться, что для найденных значений переменных  дифференциал второго порядка функции Лагранжа имеет вид , если только не все приращения  равны нулю ().

Таким образом, по теореме о достаточных условиях условного экстремума, мы заключаем, что искомый -угольник – правильный, его площадь равна .

**Замечание**: конечно, в данной задаче n – фиксированное число. Если число n считать неограниченно большим, то площадь многоугольника может быть сколь угодно близка к площади круга, а максимум площади на множестве всех n-угольников () не достигается (площадь круга – супремум площадей всевозможных вписанных в него многоугольников, но не максимум).

**Ответ**: , это площадь правильного -угольника.

**Задача 2**. Пусть  – ортогональная матрица,  – ее произвольный элемент,  –алгебраическое дополнение этого элемента в определителе . Докажите, что .

**Решение**. Зафиксируем номер одной из строк  матрицы  и рассмотрим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ)  с матрицей коэффициентов  и столбцом правых частей , где  при ,  (то есть столбец правых частей весь нулевой, кроме стоящего на месте с номером  числа 1 или -1, в зависимости от того, какое из возможных значений  имеет определитель ортогональной матрицы ).

Построенная СЛАУ имеет единственное решение, так как . Ясно из формулы разложения определителя по строке, что решение данной системы – это столбец , поскольку

 (1)

(при скалярном умножении строки определителя на строку алгебраических дополнений другой его строки мы получаем значение определителя с двумя одинаковыми строками, то есть нуль).

С другой стороны, поскольку матрица  ортогональна, имеют место равенства  (2)

Формулы (1) и (2) означают, в силу единственности решения СЛАУ, что .

В силу произвольности выбора номера  имеем  для всех , что и требовалось доказать.

**Задача 3**. Для линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами оказалось, что производная любого его решения также является решением этого уравнения. Найдите все такие уравнения.

**Решение**. Пусть  для  – уравнение из условия задачи. Пусть  – наименьший номер коэффициента, не равного тождественно константе на . Если  – решение, то после дифференцирования обеих частей уравнения и группировки слагаемых получаем



Убираем производные первых  постоянных коэффициентов во второй скобке



.

Первая скобка обнуляется, так как  по условию – решение исходного уравнения

.

Найдем промежуток , на котором  не обращается в ноль. Тогда оказывается, что любое решение на  исходного уравнения



является на интервале  решением уравнения

.

Так как размерность линейного пространства решений первого из этих уравнений равна  то размерность пространства решений второго не меньше  Отсюда, так как размерность решений второго уравнения равна , приходим к противоречию. Это означает, что коэффициентов, отличных от константы, у исходного уравнения нет. Следовательно, это уравнение с постоянными коэффициентами. Обратное (то есть тот факт, что производная любого решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами также является его решением) тоже верно, это легко проверяется дифференцированием обеих частей линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

**Ответ:** линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

**Задача 4**. Вычислите интеграл.

**Решение.** Обозначим . Сделаем замену , . Модуль якобиана этой замены равен 1. Значит,



,

то есть



Следовательно,



**Ответ:** .

**Задача 5**. От каждой точки гладкой, бесконечно дифференцируемой кривой с заданным направлением обхода отложен единичный касательный вектор, направленный по направлению обхода кривой. Доказать, что длина кривой, образованной концами этих векторов, не меньше длины исходной кривой.

**Решение.** Пусть 𝑙 – длина исходной кривой и  ,  – такая параметризация этой кривой, что длина дуги кривой от её начала до точки  равна  (натуральная параметризация). Обозначим . Так как , то дифференцируя, получаем  для . Это означает, что ,  – параметризация кривой, образованной движением конца единичного касательного вектора, отложенного от точки касания. Тогда искомая длина 

Заметим также, что соотношение  можно записать со скалярным квадратом . Продифференцировав и сократив на 2, получаем  = 0 для . Тогда



, что и требовалось доказать.

**Задача 6.** Докажите равенство .

**Решение**. Преобразуем обе части требуемого равенства к одинаковому виду.

Здесь изменение порядка суммирования требует знания свойств двойных и повторных рядов; решая задачу, студент может сделать такое преобразование из интуитивных соображений; ознакомиться с соответствующей теорией можно, например, по книге: Г. М. Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 810 с. (глава 11, § 5). Рассмотрим ряд в скобках, записанный под знаком суммы после последнего знака равенства в вышеприведенной формуле. При каждом фиксированном значении  частичные суммы этого ряда таковы:



Поэтому левая часть доказываемого равенства имеет вид

. (1)

Рассмотрим теперь правую часть доказываемого равенства, степенной ряд можно интегрировать почленно, поэтому

. (2)

Из формул (1) и (2) видим, что левая и правая части доказываемого равенства приведены к одинаковому виду, то есть равны, что и требовалось доказать.

**Задача 7.** Найдите предел: .

**Решение**.

Область интегрирования – -мерный куб  – разбивается на равные подобласти , в каждой из областей  выполняется равенство , и каждая точка области  либо лежит в одной и только одной из не пересекающихся друг с другом областей  либо на границе одной или нескольких таких областей. Таким образом,  при  и .

В силу аддитивности кратного интеграла относительно области интегрирования . Каждый кратный интеграл, стоящий справа под знаком суммы, запишем в виде повторного и вычислим: , все остальные интегралы по областям , точно такие же, их представления в виде повторных интегралов получаются, если в последней написанной формуле поменять местами  с соответствующей переменной .

Таким образом , .

**Ответ**: 1.

**Замечание.** Для уяснения приведенного здесь решения задачи можно сначала понять, что при  квадрат разбивается на два треугольника, при  куб разбивается на три пирамиды с вершинами в начале координат и основаниями, совпадающими с гранями куба, не лежащими в координатных плоскостях.