Олимпиада студентов СПбПУ по математике

2022/23 учебный год

**Задачи и решения (2–4 курс)**

**Задача 1**. Произведено 3-кратное растяжение плоскости  в направлении оси : отображение . Найдите наибольшее изменение угла наклона прямых к оси  при таком растяжении, то есть , где  – угол до растяжения,  – после; максимум ищется по множеству всевозможных прямых плоскости. Ответ докажите.

**Решение**. Уравнение прямой  после растяжения примет вид . Интересующий нас угол наклона прямой к оси  изменится на величину ; . Отсюда видим, что  достигает максимума при , и ее максимальное значение равно . В силу нечетности функции  значение .

**Ответ**: .

**Задача 2**. Докажите, что последовательность  имеет конечный предел.

**Решение**. Общий член последовательности запишем в виде . Поскольку при  выполнено неравенство , видим, что последовательность  возрастает. Докажем, что она ограничена сверху; для этого достаточно убедиться, что ограничена сверху последовательность . Действительно,



а последняя сумма является n-й частичной суммой положительного сходящегося числового ряда (его сходимость легко доказать по признаку Даламбера); последовательность его частичных сумм, очевидно, ограничена сверху. Таким образом, последовательность  возрастает и ограничена сверху, значит, по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности, она имеет конечный предел.

**Задача 3**. Докажите, что для функции  с областью определения , удовлетворяющей при всех  функциональному уравнению  на отрезке  найдется точка, в которой  равна нулю.

**Решение**. По условию задачи при каждом  выполнены равенства:

 (первое равенство дано в условии, второе получается из первого заменой  на ). Решая полученную СЛАУ относительно неизвестных  и , найдем  (формула для  теперь очевидна, но можно ее и не использовать далее). Легко видеть, что  и на отрезке  функция  дифференцируема; тогда по теореме Ролля существует точка  такая, что .

**Задача 4**. Найдите  такое (такие?), что существует конечный предел , вычислите этот (эти) пределы.

**Решение**. Рассмотрим . Функция под интегралом положительна и непрерывна при , а  (легко проверить с помощью правила Лопиталя); рассматриваемый интеграл является несобственным второго рода из-за того, что . По второму признаку сравнения, сравнивая интеграл  с расходящимся интегралом , убеждаемся, что он расходится, то есть .

Поэтому при  будет , а при  в этом пределе возникает неопределенность вида , раскроем ее, приведя к виду , применяя правило Лопиталя и эквивалентность бесконечно малых  при . При дифференцировании интеграла по переменному пределу интегрирования используем соответствующую теорему (теорема Барроу).

Получим при :

 

**Ответ**: 0 при ; 1 при .

**Задача 5**. Найдите сумму ряда .

**Решение**. Обозначим , тогда . Поэтому n-я частичная сумма нашего ряда имеет вид .

**Ответ**: .

**Задача 6**. Докажите, что решение задачи Коши  ограничено на всей числовой оси.

**Решение**. Правая часть дифференциального уравнения непрерывна и имеет непрерывную производную на всей плоскости , значит, вся плоскость является для данного уравнения областью существования и единственности решений. Прямые  являются графиками решений уравнения. Поэтому интегральная кривая, проходящая через точку , не может пересечь прямые  без нарушения условия единственности решений. Следовательно, , где  – решение приведенной в условии задачи Коши.

**Задача 7**. Пусть комплексные числа  таковы, что все корни уравнения  лежат на окружности . Обладают ли корни уравнения  тем же свойством? Ответ докажите.

**Решение**. Обозначим корни исходного уравнения , заметим, что поскольку , то 

Поскольку  получаем ; ; , откуда . Таким образом, , поэтому уравнение  имеет вид . Таким образом, оно всегда имеет корень , остальные его корни – это корни квадратного уравнения. Заметим, что из равенства  следует, что , поэтому дискриминант полученного квадратного уравнения . Если , то корни квадратного уравнения комплексно-сопряженные, а их произведение равно свободному члену квадратного уравнения, то есть единице, поэтому корни лежат на окружности . Если же , то есть , то уравнение  имеет вид , его единственный корень  (кратности 3) также лежит на окружности .

**Ответ**: обладают.

**Задача 8**. Докажите, что если  – квадратная матрица порядка n, то , где  – квадратные матрицы порядка n-1, полученные из  вычеркиванием k-й строки и k-го столбца;  – единичные матрицы порядков n и n-1, соответственно.

**Решение**. Если все элементы  некоторой матрицы  являются дифференцируемыми функциями переменной , то, дифференцируя равенство  (определение определителя), будем иметь  , что, очевидно, есть сумма n определителей, каждый из которых отличается от  лишь тем, что одна из строк  заменена строкой, где вместо ее прежних элементов (стоящих в определителе) стоят их производные. В нашей задаче измененная таким способом k-я строка определителя  имеет следующий вид: диагональный элемент измененной строки равен , остальные элементы –нули. Сумма n определителей, полученных из  поочередным изменением строк указанным образом, и есть, очевидно, сумма, стоящая в правой части доказываемого равенства.