Олимпиада студентов СПбПУ по математике

2022/23 учебный год

**Задачи и решения (1 курс)**

**Задача 1**. Докажите, что ни одно число , где n – любое натуральное число, не представимо в виде суммы двух или более последовательных натуральных чисел.

**Решение**. Докажем утверждение рассуждением от противного. Пусть  для некоторых натуральных , причем  ( – количество последовательных натуральных слагаемых), и для некоторого . Тогда  . Очевидно, сомножители в правой части последнего равенства имеют разную четность, и, поскольку , они оба больше единицы. Но ни одно число вида  не имеет нечетных делителей, отличных от единицы. Полученное противоречие доказывает утверждение.

**Задача 2**. Существуют ли векторы  такие, что одновременно выполнены следующие неравенства:  ? Ответ докажите.

**Решение**. Из условия имеем ; ; . Складывая три полученных неравенства, получаем , то есть , что невозможно.

**Ответ**: таких векторов не существует.

**Задача 3**. Вычислите , где  – целая часть числа .

**Решение**. В силу определения целой части выполняется двойное неравенство , поэтому общий член последовательности из условия задачи имеет следующие оценки снизу и сверху: , откуда, вычисляя сумму арифметической прогрессии в левой и правой частях двойного неравенства, получаем . Левая и правая части полученного двойного неравенства имеют одинаковый предел ; по теореме о сжатой последовательности («принцип двух милиционеров»), и средняя часть неравенства имеет тот же предел.

**Ответ**: .

**Задача 4**. Докажите, что если , то для всякого  и для всякого  верно неравенство .

**Решение**.  (не предполагается, что для решения задачи надо помнить эту формулу: ее легко получить из равенства , записав  как  ). Поэтому производная го порядка имеет вид: , откуда имеем .

**Задача 5**. Докажите неравенство  для всех .

**Решение.** Перепишем доказываемое неравенство в виде . Обозначим  многочлен, стоящий в левой части неравенства, исследуем его монотонность и точки экстремума. Для этого рассмотрим его производную: . Поскольку многочлен , очевидно, не имеет вещественных корней и положителен при любом вещественном , то многочлен  имеет единственную точку экстремума (минимума) , всюду слева от нее  строго убывает, а справа – строго возрастает. Таким образом, при всех  имеем . Вычислим , тогда всех  имеем ; требуемое неравенство доказано.

**Задача 6**. Вычислите 

**Решение 1**. Сделаем в данном интеграле замену переменной , тогда интеграл примет вид 

поскольку это интеграл нечетной функции по отрезку, симметричному относительно .

**Решение 2**. (Автор: студентка 1 курса ФизМеха Чинь Тхи Тху Хоай)

Обозначим искомый интеграл . Сделаем в данном интеграле замену , тогда интеграл примет вид 

Отсюда 

**Ответ:** 0.

**Задача 7**. Все элементы квадратной матрицы  порядка  –натуральные числа. Известно, что у 92 из этих чисел остаток от деления на 3 равен 1. Доказать, что определитель  делится на 3.

**Решение**. Из 100 элементов матрицы по условию не более 8 чисел могут иметь остаток от деления на 3, не равный 1. Эти числа располагаются не более, чем в 8 строках. Значит, по крайней мере в 2 строках все элементы имеют остаток от деления на 3, равный 1. Если одну из этих двух строк вычесть из другой, то в определителе, с одной стороны, окажется строка, все элементы которой делятся на 3, а такой определитель, очевидно, делится на 3; с другой стороны, определитель не изменится при указанном преобразовании строк.

**Задача 8**. Что больше  или  ?

**Решение**. Рассмотрим функцию  Из вида графика функции  (параболы) в зависимости от того,  или , ясно, что 
Поэтому  то есть , откуда ясно, что первое выражение в условии задачи равно .

Теперь рассмотрим . Для линейной функции переменной , имеющей вид , ясно, что в зависимости от знака , функция  достигает минимума на том или другом конце отрезка [-1; 1], а в случае  функция . Таким образом,  то есть . Функция  при  и достигает своего максимума, равного нулю, в точках . Таким образом, второе выражение в условии задачи равно .

**Ответ**: .