Олимпиада студентов СПбПУ по математике

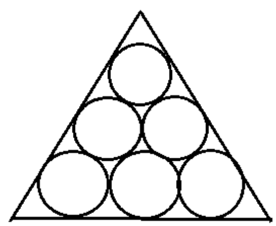
2024/25 учебный год

Задачи и решения (1 курс)

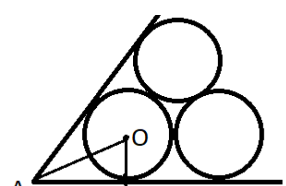
Задача 1. Докажите, что одно из решений уравнения $2000x^2-(4001+0{,}1^{2000})x+2001=0$ больше 1, а другое меньше 1.

Решение. Пусть $P_2(x)$ – квадратный трехчлен в левой части уравнения. Поскольку коэффициент при квадрате переменной $2000>0,$ ветви параболы $y=P_2(x)$ направлены «вверх», а так как $P_2(1)=-0{,}1^{2000}<0,$ то эта парабола – график функции $y=P_2(x)$ – пересекает ось OX в двух точках $x_1, x_2,$ причем $x_1<1, x_2>1.$

Задача 2. В равносторонний треугольник вписаны n одинаковых окружностей так, как на рисунке. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n/S\right),$ где S – площадь треугольника, S_n – сумма площадей всех n кругов.



Решение. Обозначим m количество треугольников, которые касаются нижней (любой выбранной) стороны треугольника. Тогда общее количество кругов $n=\dfrac{m(m+1)}{2},$ отсюда сразу заметим, что $n\to+\infty \Leftrightarrow m\to+\infty.$ Обозначим a длину стороны равностороннего треугольника из условия задачи, r – радиус каждой из n окружностей.



Рассмотрим треугольник AOK (см. рисунок выше), где A – вершина равностороннего треугольника из условия, точка K – ближайшая к A точка касания окружностью одной из его сторон, и точка O – центр соответствующей окружности. Тогда видим: $|AK| = r\sqrt{3}.$ Поэтому $a = 2r(m-2) + 2r + 2r\sqrt{3} = r(2m - 2 + 2\sqrt{3}),$ и площадь большого равностороннего треугольника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2m-2+2\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3}.$ Суммарная площадь кругов $S_n = \pi r^2 n = \pi r^2 \frac{m(m+1)}{2}.$ Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\left({S_n}/{S}\right) = \lim\limits_{m\to\infty}\pi\frac{m(m+1)4}{2\sqrt{3}(2m-2+2\sqrt{3})^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

Ответ: $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

Задача 3. Матрица X размера 3x3 является решением матричного уравнения $AX^2 + BX = O,$ где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, O$ – нулевая матрица. Докажите, что $\det X = 0.$

Решение. Вычислим определители $|A| = 4, |B| = 0.$ По условию $AX^2 = -BX$, поэтому $4\cdot\left|X^2\right| = (-1)^3|B|\cdot|X| = 0.$ Значит, $\left|X^2\right| = |X|^2 = 0 \Rightarrow |X| = 0.$

Задача 4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

Решение. Обозначим a_n – n-й член последовательности, предел которой надо найти. Заменяя знаменатель каждого слагаемого в сумме $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}$ наибольшим из них, имеем оценку $a_n \geq b_n$, где $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n}}.$ Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$

Ответ: $+\infty.$

Задача 5. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}x}{1+x}dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям, положив $u(x)=\text{arctg}x,\ dv(x)=\frac{dx}{1+x}.$ Получим $\int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}x}{1+x}dx = \text{arctg}x\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$ Вычислим оставшийся в правой части равенства интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} \text{замена} \\ x=tgt \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\text{tg}t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.$$

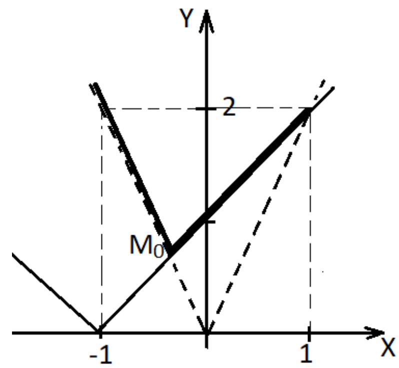
Заметим, что замена $t=\frac{\pi}{4}-\tau$ приводит первый из полученных интегралов к виду: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)\right)d\tau = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\tau)d\tau.$

Таким образом, искомый интеграл равен $\frac{\pi}{4}\ln 2 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

Ответ: $\frac{\pi}{8}\ln 2.$

Задача 6. Найдите $\min f(x), x\in\mathbb{R},$ если $f(x)=\max\{2|x|;|1+x|\}.$

Решение. Решим задачу графически. Построим графики функций $y=2|x|$ (на рисунке пунктиром) и $y=|1+x|$ (на рисунке тонкой линией), тогда легко получить график функции $y = f(x)$ (на рисунке жирной линией).



Ясно, что точка M_0 на графике соответствует искомому минимуму, ее абсцисса x находится из уравнения $-2x = 1 + x,$ то есть $x = -\frac{1}{3}.$ Поэтому $\min f(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$

Ответ: 2/3.

Задача 7. Каждой паре $(x; y)$ целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его как $x \circ y.$ Числа $x \circ y$ и $y \circ x$ могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел a, b, c, d выполнено равенство $(a \circ b + d) \circ c = (a - b) \circ (c - d) + 1$. Найдите значение $2025 \circ 1991$.

Решение. Присмотревшись к равенству в условии, выдвигаем гипотезу: $x \circ y = x - y + m,$ где $m \in \mathbb{Z}.$

Проверим ее: $(a \circ b + d) \circ c = (a - b + m + d) \circ c = a - b + d - c + 2m.$ С другой стороны, правая часть равенства, заданного в условии, при выполнении гипотезы имеет вид $(a - b) \circ (c - d) + 1 = a - b - c + d + m + 1.$ Сравнивая преобразованный вид правой и левой части равенства из условия, видим, что наша гипотеза соответствует условию задачи лишь при $2m = m + 1 \Rightarrow m = 1.$ Тогда $2025 \circ 1991 = 2025 - 1991 + 1 = 35.$

Ответ: 35.

Задача 8. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что уравнение $f(x) = 2x \cdot f(x^2)$ имеет корень на отрезке $[0; 1].$

Решение. Рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_0^x (f(t)-2t\cdot f(t^2))dt$. Покажем, что она удовлетворяет на отрезке $[0;1]$ условиям теоремы Ролля. При $x\in[0;1]$ она дифференцируема (теорема Барроу). Найдем значения функции на концах промежутка: $F(0)=0$ (очевидно); $F(1)=\int\limits_0^1 f(t)dt-\int\limits_0^1 f(t^2)d(t^2)=0.$

Таким образом по теореме Ролля существует точка $c\in[0;1]$ такая, что $F'(c)=0$. Производную по теореме Барроу в любой точке $x\in[0;1]$ находим в виде $F'(x)=f(x)-2x\cdot f(x^2)$, поэтому $F'(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=2c\cdot f(c^2)$.

Замечание: условие $f\in C(\mathbb{R})$ слишком сильное, для решения задачи достаточно знать, что $f\in C([0;1])$.