Олимпиада студентов СПбПУ по математике

2024/25 учебный год

Задачи и решения (2-3 курс)

Задача 1. Пусть I_n – квадратная матрица $n \times n,$ все элементы которой равны 1; E – единичная матрица порядка $n.$ Докажите, что $(E - I_n)^{-1} = E - \dfrac{1}{n-1} \cdot I_n.$

Решение. Заметим, что $I_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = n \cdot I_n.$ Поэтому имеем

$$\left(E - \frac{1}{n-1} \cdot I_n \right) \cdot (E - I_n) = E - I_n - \frac{1}{n-1} \cdot I_n + \frac{1}{n-1} I_n^2 =$$

$$= E - I_n + \frac{1}{n-1}(n-1) I_n = E. \qquad \blacksquare$$

Задача 2. В классе функций, дифференцируемых на $\mathbb{R}$, найдите функцию $f(x),$ если $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \cdot \left(\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{y^2}{3} \right), f(2) = -2.$

Решение. Возьмем от обеих частей равенства из условия производную по x: $f'(x+y) = f'(x) + x^2 y + xy^2 + \dfrac{y^3}{3}.$ Правая часть полученного равенства имеет частную производную по y при любом $x,$ а потому и левая часть имеет частную производную по y при любом $x.$ Отсюда, взяв от обеих частей последнего равенства частную производную по $y,$ для всех значений x, y получаем: $f''(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2.$ Таким образом, видим, что искомая функция одной переменной $f(x)$ дважды дифференцируема при любом x, и верна формула $f''(x) = x^2.$ Отсюда $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} + C_1, f(x) = \dfrac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$

Подставляя в формулу из условия задачи значения $x = y = 0,$ получаем $f(0) = 2f(0),$ откуда $f(0) = 0,$ значит $C_2 = 0.$ В силу условия $f(2) = -2$ имеем $\frac{16}{12} + 2C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{3}.$

Ответ: $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5}{3}x.\quad x,$

Задача 3. Решите уравнение $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\ln x)^n}{n!} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ при всех $x > 0.$ Поскольку левая часть уравнения имеет смысл лишь при положительных значениях $x,$ а правая – при любых значениях $x,$ преобразуем и правую часть, считая, что $x > 0.$ Правую часть запишем в виде $\frac{4}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{x}\cdot\sin 2x.$ Таким образом, уравнение имеет вид $\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\cdot\sin 2x,$ и мы ищем решения при условии $x > 0.$ Решая при этом условии уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2},$ получим $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k = 0,1,2,\ldots.$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k = 0,1,2,\ldots.$

Задача 4. Найдите непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию $f(x),$ *чётную или нечетную,* удовлетворяющую уравнению $\iint_D x\cdot f\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \frac{a^2}{3}(f(a) + \sin a - 1),\ \ \forall a > 0$, где область D – сектор: $D = \left\{x^2 + y^2 \le a^2, |y| \le \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}.$

Решение. В двойном интеграле из условия задачи сделаем полярную замену переменных и проинтегрируем по переменной r (полярный радиус), интеграл примет вид $\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a\sin\varphi)d(\sin\varphi)=\frac{a^2}{3}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt.$ Подставляя полученное выражение интеграла в левую часть равенства из условия задачи и сокращая на $\frac{a^2}{3}$, получаем при всех $a>0$ равенство $\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = f(a)+\sin a-1.$ Поскольку по условию функция $f(t)$ всюду непрерывна, то левая часть данного равенства дифференцируема по a при всех $a>0$, а значит и правая часть обладает этим свойством. Заметим, что его правая часть – всюду непрерывная функция переменной a, предел левой части при $a\to 0+$ нулевой, откуда $f(0)=1.$ Дифференцируем полученное равенство по переменной a (производную левой части находим по теореме Барроу), получаем при всех $a>0$: $\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a}{2}\right)+f\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=f'(a)+\cos a.$ (*) Левая часть последнего равенства не меняется при замене a на $-a$ и, поскольку $f(0)=1$, левая часть равна единице при $a=0$, поэтому в левой части равенства (*) имеем четную функцию, которая определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу непрерывности искомой функции f по условию. Значит, с учетом четности косинуса, производная $f'(a)$ – непрерывная при $\forall a\in\mathbb{R}$ четная функция. Поэтому у нее имеется нечетная первообразная, которую обозначим $g(a), a\in\mathbb{R}.$ В силу непрерывности и нечетности функции $g(a)$ верно, что $g(0)=0,$ значит, $f(a)=g(a)+1,$ поскольку $f(0)=1.$ Подставим найденное выражение для $f(a)$ в равенство (*) и, с учетом нечетности g, получим $g'(a)=-\cos a+1\Rightarrow g(a)=-\sin a+a$ (учтено, что $g(0)=0$). Отсюда получаем ответ $f(a)=-\sin a+a+1.$

Ответ: $f(x)=-\sin x+x+1, x\in\mathbb{R}.$

Примечание. Благодарим студента Егора Григорьева, призера олимпиады, указавшего на неточность в первоначально приведенном разборе данной задачи. С добавлением условия четности либо нечетности искомой функции (курсив в формулировке задания) задача имеет единственное решение, полученное выше. Но без этого условия равенство (*) верно, вообще говоря, только при $a \geq 0$, и существует множество функций, являющихся решениями задачи. Ниже приводим примеры таких функций, построенные студентом ИЭИТ Егором Григорьевым. В примерах производится проверка того равенства, которое получено непосредственно из условия задачи, и дифференцированием которого получается равенство (*).

Пример 1:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 2\cos(2x) - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Проверка:

При $a>0$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{a}{2}} (f(t) + f(-t))dt = \int_0^{\frac{a}{2}} (1 + (2\cos(2t) - 1)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} 2\cos(2t)\,dt = \sin(a)$$

Правая часть:

$$f(a) + \sin(a) - 1 = 1 + \sin(a) - 1 = \sin(a)$$

Левая и правая части совпали.

Пример 2:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \geq 0 \\ -8x + 2\cos(2x) - 1 - x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Проверка:

При $a > 0$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \int_0^{\frac{a}{2}} (f(t) + f(-t))dt =$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} ((1+t^2) + (8t + 2\cos(2t) - 1 - t^2))dt = \int_0^{\frac{a}{2}} (8t + 2\cos(2t))dt =$$

$$= (4t^2 + \sin(2t))\Big|_0^{\frac{a}{2}} = a^2 + \sin(a)$$

Правая часть:

$$f(a) + \sin(a) - 1 = (1 + a^2) + \sin(a) - 1 = a^2 + \sin(a)$$

Снова совпали левая и правая части.

Задача 5. Найдите сумму ряда $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Решение. $S(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} \ldots;$

$$S'(x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots;$$

$$S''(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots;$$

$$S'''(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots;$$

$$S^{(IV)}(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots = S(x).$$

Степенной ряд из условия, как легко видеть, имеет бесконечный радиус сходимости, поэтому все записанные равенства, полученные почленным дифференцированием степенного ряда, верны при любых $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что очевидно $S(0) = 0, S'(0) = S''(0) = S'''(0) = 0.$ Это начальные данные задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения $S^{(IV)}(x) = S(x)$ четвертого порядка, с постоянными коэффициентами. Решив эту задачу Коши, получаем искомую сумму ряда: $S(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4} + \frac{1}{2}\cos x.$

Ответ: $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x)$.

Задача 6. Возможно ли расположение двух интегральных кривых (1) и (2) дифференциального уравнения второго порядка $y''+g(x)\cdot y=0$, где $g(x)$ – всюду непрерывная функция, такое, как на рисунках а) (касание в одной общей точке), б), в) ? Ответы докажите.

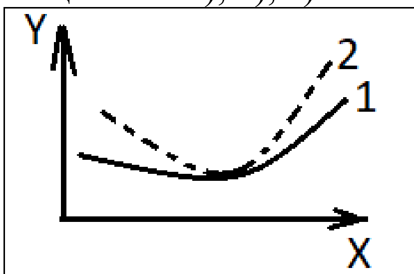

Рис. а.

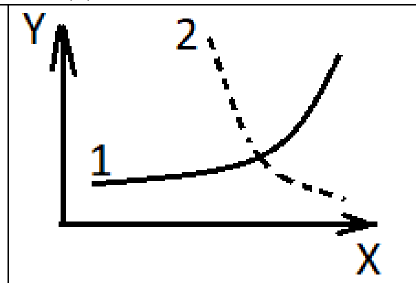

Рис. б.

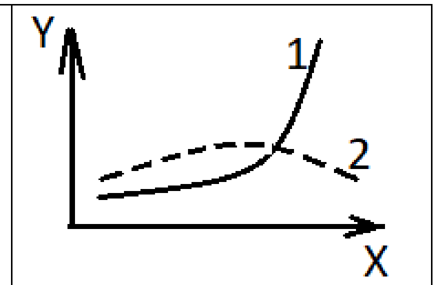

Рис. в.

Решение. а) Невозможно: при непрерывности функции $g(x)$ всё пространство $\mathbb{R}^3$ должно быть областью единственности, а при касании двух интегральных кривых, как на рисунке (а), возникает точка неединственности, поскольку два решения имеют в общей точке одинаковые значения и значения первых производных, и эти решения не совпадают нигде, кроме самой точки касания их графиков.

б) Возможно: в точке пересечения интегральных кривых у соответствующих решений разные производные, поэтому они не являются решениями одной и той же задачи Коши. Заметим, что из вида дифференциального уравнения очевидно, что значение $y''(x)$ для каждого его решения $y(x)$ зависит лишь от координат точки $(x,y(x))$, и в точке пересечения интегральных кривых вторые производные соответствующих решений должны быть одинаковы. Из рисунка (б) не следует, что это условие нарушено.

в) Невозможно: кривые имеют в точке пересечения разный характер выпуклости, поэтому вторые производные соответствующих решений дифференциального уравнения в их общей точке не одинаковы (см. пункт (б)).

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

Задача 7. Вычислите предел последовательности: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{1+x^5}\right)$.

Решение 1. Легко видеть, что при $x\ge 1$ выполнено неравенство $\frac{x(1+x)^4}{1+x^5}\ge 1$. Поскольку на промежутке интегрирования $x\ge n\ge 1, n\in\mathbb{N}$, то в силу монотонности определенного интеграла получаем двойное неравенство $n^3\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{(1+x)^4}\le n^3\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{1+x^5}\le n^3\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{x^5}=n^3\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{x^4}$. Покажем, что пределы левого и правого члена полученного двойного неравенства существуют и равны, тогда по теореме о сжатой последовательности («принцип двух милиционеров») таков же и искомый предел последовательности.

Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty}n^3\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{(1+x)^4}=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(-\frac{1}{3(1+x)^3}\Bigg|_n^{2n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}n^3\left(\frac{1}{(1+n)^3}-\frac{1}{(1+2n)^3}\right)=\frac{7}{24}.$$

Аналогично вычисляется $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{x^4}=\frac{7}{24}$.

Ответ: $\frac{7}{24}$.

Решение 2. Заметим, что для вычисления этого предела требуется раскрыть неопределенность вида "$\infty\cdot 0$". Действительно, $0\le\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{1+x^5}\le\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{x^5}=\int\limits_n^{2n}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3n^3}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{24n^3}\to 0$ при $n\to+\infty$. Иными словами, для вычисления $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int\limits_n^{2n}\frac{xdx}{1+x^5}}{1/n^3}$ требуется раскрыть неопределенность "$\frac{0}{0}$". Рассмотрим предел функции вещественной переменной t и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int\limits_t^{2t}\frac{xdx}{1+x^5}}{1/t^3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{2t}{1+32t^5}-\frac{t}{1+t^5}}{-3/t^4}=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{32}-1\right)=\frac{7}{24}.$$

Таково же значение искомого предела последовательности. Отметим, что, вычисляя предел числителя дроби для применения правила Лопиталя, применяем теорему Барроу о дифференцировании определенного интеграла по переменному пределу интегрирования, с учетом того, что переменными являются и верхний и нижний пределы интегрирования: $\int_t^{2t} \frac{xdx}{1+x^5} = \int_t^0 \frac{xdx}{1+x^5} + \int_0^{2t} \frac{xdx}{1+x^5}, t > 0$. Дифференцируя по t определенный интеграл с переменным верхним пределом $2t$, применяем правило дифференцирования сложной функции.

Ответ: $\frac{7}{24}$.

Задача 8. Вычислите $\iint_D [x^2 + y^2] dxdy$, где $[x]$ – целая часть вещественного числа x, а область интегрирования $D = \{-1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1\}$.

Решение. Разобьём область D на два подмножества $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \left\{(x;y) : x^2 + y^2 < 1\right\}$, $D_2 = D \setminus D_1$. Для точек $(x;y) \in D_1$, очевидно, $[x^2 + y^2] = 0$. Для точек $(x;y) \in D_2$, очевидно, $[x^2 + y^2] = 1$. Таким образом, искомый интеграл $\iint_D [x^2 + y^2] dxdy = \iint_{D_2} [x^2 + y^2] dxdy = \iint_{D_2} dxdy = S_{D_2}$, то есть он равен площади множества D_2, а эта площадь есть разность площадей квадрата D и круга D_1: $S_{D_2} = S_D - S_{D_1} = 4 - \pi$.

Ответ: $4 - \pi$.