

Задачи и решения (2-3 курс)

Задача 1. Пусть I_n – квадратная матрица $n \times n$, все элементы которой равны 1; E – единичная матрица порядка n . Докажите, что $(E - I_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1} \cdot I_n$.

Решение.

Заметим,

что

$$I_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = n \cdot I_n. \text{ Поэтому имеем}$$

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{1}{n-1} \cdot I_n\right) \cdot (E - I_n) &= E - I_n - \frac{1}{n-1} \cdot I_n + \frac{1}{n-1} I_n^2 = \\ &= E - I_n + \frac{1}{n-1} (n-1) I_n = E. \end{aligned}$$



Задача 2. В классе функций, дифференцируемых на $\mathbb{R}$, найдите функцию $f(x)$, если $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \cdot \left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right)$, $f(2) = -2$.

Решение. Возьмем от обеих частей равенства из условия производную по x : $f'(x+y) = f'(x) + x^2 y + xy^2 + \frac{y^3}{3}$. Правая часть полученного равенства имеет частную производную по y при любом x , а потому и левая часть имеет частную производную по y при любом x . Отсюда, взяв от обеих частей последнего равенства частную производную по y , для всех значений x, y получаем: $f''(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. Таким образом, видим, что искомая функция одной переменной $f(x)$ дважды дифференцируема при любом x , и верна формула $f''(x) = x^2$. Отсюда

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad f(x) = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2.$$

Подставляя в формулу из условия задачи значения $x = y = 0$, получаем $f(0) = 2f(0)$, откуда $f(0) = 0$, значит $C_2 = 0$. В силу условия $f(2) = -2$ имеем $\frac{16}{12} + 2C_1 = -2 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{3}$.

Ответ: $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5}{3}x, \quad x,$

Задача 3. Решите уравнение $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\ln x)^n}{n!} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ при

всех $x > 0$. Поскольку левая часть уравнения имеет смысл лишь при положительных значениях x , а правая – при любых значениях x , преобразуем и правую часть, считая, что $x > 0$. Правую часть запишем в виде

$$\frac{4}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{x} \cdot \sin 2x. \quad \text{Таким образом, уравнение имеет вид}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot \sin 2x, \text{ и мы ищем решения при условии } x > 0. \text{ Решая при этом условии}$$

$$\text{уравнение } \sin 2x = \frac{1}{2}, \text{ получим } x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k, k = 0, 1, 2, \dots$

Задача 4. Найдите непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $\iint_D x \cdot f\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx dy = \frac{a^2}{3} (f(a) + \sin a - 1), \quad \forall a > 0$, где область D

$$\text{– сектор: } D = \left\{ x^2 + y^2 \leq a^2, |y| \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Решение. В двойном интеграле из условия задачи сделаем полярную замену переменных и проинтегрируем по переменной r (полярный радиус),

интеграл примет вид $\frac{a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(a \sin \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{a^2}{3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t) dt$. Подставляя

полученное выражение интеграла в левую часть равенства из условия задачи и сокращая на $\frac{a^2}{3}$, получаем при всех $a > 0$ равенство

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t) dt = f(a) + \sin a - 1. \quad \text{Поскольку по условию функция } f(t) \text{ всюду}$$

непрерывна, то левая часть данного равенства дифференцируема по a при всех $a > 0$, а значит и правая часть обладает этим свойством. Заметим, что его правая часть – всюду непрерывная функция переменной a , предел левой части при $a \rightarrow 0+$ нулевой, откуда $f(0) = 1$. Дифференцируем полученное равенство по переменной a (производную левой части находим по теореме

Барроу), получаем при всех $a > 0$: $\frac{1}{2} \left(f\left(\frac{a}{2}\right) + f\left(-\frac{a}{2}\right) \right) = f'(a) + \cos a$. (*) Левая

часть последнего равенства не меняется при замене a на $-a$ и, поскольку $f(0) = 1$, левая часть равна единице при $a = 0$, поэтому в левой части равенства (*) имеем четную функцию, которая определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу непрерывности искомой функции f по условию. Значит, с учетом четности косинуса, производная $f'(a)$ – непрерывная при $\forall a \in \mathbb{R}$ четная функция. Поэтому у нее имеется нечетная первообразная, которую обозначим $g(a)$, $a \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности и нечетности функции $g(a)$ верно, что $g(0) = 0$, значит, $f(a) = g(a) + 1$, поскольку $f(0) = 1$. Подставим найденное выражение для $f(a)$ в равенство (*) и, с учетом нечетности g , получим $g'(a) = -\cos a + 1 \Rightarrow g(a) = -\sin a + a$ (учтено, что $g(0) = 0$). Отсюда получаем ответ $f(a) = -\sin a + a + 1$.

Ответ: $f(x) = -\sin x + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Найдите сумму ряда $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Решение. $S(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} \dots;$

$$S'(x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots;$$

$$S''(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots;$$

$$S'''(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \dots;$$

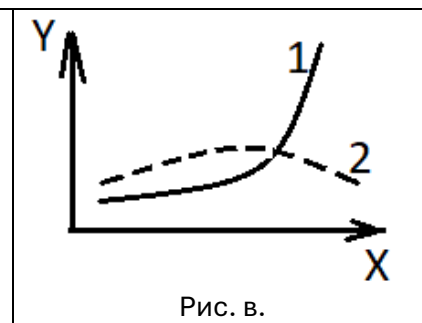
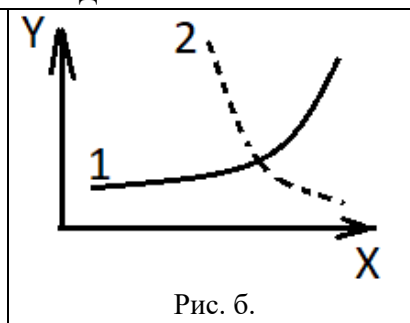
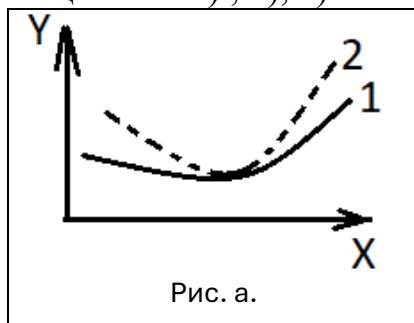
$$S^{(IV)}(x) = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = S(x).$$

Степенной ряд из условия, как легко видеть, имеет бесконечный радиус сходимости, поэтому все записанные равенства, полученные почленным дифференцированием степенного ряда, верны при любых $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что очевидно $S(0) = 0$, $S'(0) = S''(0) = S'''(0) = 0$. Это начальные данные задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения $S^{(IV)}(x) = S(x)$ четвертого порядка, с постоянными коэффициентами. Решив

эту задачу Коши, получаем искомую сумму ряда: $S(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4} + \frac{1}{2} \cos x$.

Ответ: $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$.

Задача 6. Возможно ли расположение двух интегральных кривых (1) и (2) дифференциального уравнения второго порядка $y'' + g(x) \cdot y = 0$, где $g(x)$ – всюду непрерывная функция, такое, как на рисунках а) (касание в одной общей точке), б), в)? Ответы докажете.



Решение. а) Невозможно: при непрерывности функции $g(x)$ всё пространство $\mathbb{R}^3$ должно быть областью единственности, а при касании двух интегральных кривых, как на рисунке (а), возникает точка неединственности, поскольку два решения имеют в общей точке одинаковые значения и значения первых производных, и эти решения не совпадают нигде, кроме самой точки касания их графиков.

б) Возможно: в точке пересечения интегральных кривых у соответствующих решений разные производные, поэтому они не являются решениями одной и той же задачи Коши. Заметим, что из вида дифференциального уравнения очевидно, что значение $y''(x)$ для каждого его решения $y(x)$ зависит лишь от координат точки $(x, y(x))$, и в точке пересечения интегральных кривых вторые производные соответствующих решений должны быть одинаковы. Из рисунка (б) не следует, что это условие нарушено.

в) Невозможно: кривые имеют в точке пересечения разный характер выпуклости, поэтому вторые производные соответствующих решений дифференциального уравнения в их общей точке не одинаковы (см. пункт (б)).

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

Задача 7. Вычислите предел последовательности: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \frac{x dx}{1+x^5} \right)$.

Решение 1. Легко видеть, что при $x \geq 1$ выполнено неравенство $\frac{x(1+x)^4}{1+x^5} \geq 1$. Поскольку на промежутке интегрирования $x \geq n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, то в силу монотонности определенного интеграла получаем двойное неравенство $n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{(1+x)^4} \leq n^3 \int_n^{2n} \frac{x dx}{1+x^5} \leq n^3 \int_n^{2n} \frac{x dx}{x^5} = n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4}$. Покажем, что пределы левого и правого члена полученного двойного неравенства существуют и равны, тогда по теореме о сжатой последовательности («принцип двух милиционеров») таков же и искомый предел последовательности.

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{(1+x)^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(-\frac{1}{3(1+x)^3} \Big|_n^{2n} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(\frac{1}{(1+n)^3} - \frac{1}{(1+2n)^3} \right) = \frac{7}{24}.$$

Аналогично вычисляется $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4} = \frac{7}{24}.$

Ответ: $\frac{7}{24}.$

Решение 2. Заметим, что для вычисления этого предела требуется раскрыть неопределенность вида " $\infty \cdot 0$ ". Действительно,

$$0 \leq \int_n^{2n} \frac{xdx}{1+x^5} \leq \int_n^{2n} \frac{xdx}{x^5} = \int_n^{2n} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3n^3} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{24n^3} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad \text{Иными}$$

словами, для вычисления $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_n^{2n} \frac{xdx}{1+x^5}}{1/n^3}$ требуется раскрыть неопределенность

" $\frac{0}{0}$ ". Рассмотрим предел функции вещественной переменной t и применим

правило Лопиталья:
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_t^{2t} \frac{xdx}{1+x^5}}{1/t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{2t}{1+32t^5} - \frac{t}{1+t^5}}{-3/t^4} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{32} - 1 \right) = \frac{7}{24}.$$

Таково же значение искомого предела последовательности. Отметим, что, вычисляя предел числителя дроби для применения правила Лопиталья, применяем теорему Барроу о дифференцировании определенного интеграла по переменному пределу интегрирования, с учетом того, что переменными являются и верхний и нижний пределы интегрирования:

$$\int_t^{2t} \frac{xdx}{1+x^5} = \int_t^0 \frac{xdx}{1+x^5} + \int_0^{2t} \frac{xdx}{1+x^5}, t > 0. \text{ Дифференцируя по } t \text{ определенный интеграл}$$

с переменным верхним пределом $2t$, применяем правило дифференцирования сложной функции.

Ответ: $\frac{7}{24}.$

Задача 8. Вычислите $\iint_D [x^2 + y^2] dx dy$, где $[x]$ – целая часть вещественного числа x , а область интегрирования $D = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$.

Решение. Разобьём область D на два подмножества $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x; y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $D_2 = D \setminus D_1$. Для точек $(x; y) \in D_1$, очевидно, $[x^2 + y^2] = 0$. Для точек $(x; y) \in D_2$, очевидно, $[x^2 + y^2] = 1$. Таким образом, искомый интеграл $\iint_D [x^2 + y^2] dx dy = \iint_{D_2} [x^2 + y^2] dx dy = \iint_{D_2} dx dy = S_{D_2}$, то есть он равен площади множества D_2 , а эта площадь есть разность площадей квадрата D и круга D_1 : $S_{D_2} = S_D - S_{D_1} = 4 - \pi$.

Ответ: $4 - \pi$.