Задачи и решения - 2026

1 курс

Задача 1. Вычислите $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\cdot\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx.$

Решение. Рассмотрим при $x>0$ функцию $f(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}.$

Вычислим ее производную

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}}\cdot\frac{(-1)}{2(x+1)^{3/2}}-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{(-1)}{2x\sqrt{x}}=\frac{-1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1))}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(x+1))}=0.$$

Таким образом, $f(x)=const$ при $x>0$; $f(1)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}1=0,$ поэтому $f(x)\equiv 0$ при $x>0$. Заметим, что функция $\sqrt{x}\cdot(f(x)+1),$ стоящая под знаком интеграла, не определена при $x=0,$ и интеграл можно рассматривать как несобственный. Очевидно, его значение

$\lim\limits_{\delta\to 0+}\int\limits_\delta^1 \sqrt{x}\cdot(f(x)+1)dx=\int\limits_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}.$ **Ответ:** $2/3$.

Задача 2. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{D_n}{n!\ln n},$ если

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1 & \dots & \dots & n & 1\\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & n+1\end{vmatrix}.$$

Решение 1. Заметим, что определитель D_n имеет порядок $n-1$. Преобразуем D_n, используя свойства определителя, а именно, вычтем из каждого столбца с первого до $(n-2)-$ го последний столбец. Получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & n-1 & 1 \\ -n & -n & \dots & \dots & -n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Теперь умножим первую строку на $\frac{n}{2}$ и прибавим к последней, вторую – на $\frac{n}{3}$ и прибавим к последней и т.д. ($k-$ тую строку, $1 \le k \le n-2$, умножаем на $\frac{n}{k+1}$ и прибавляем к последней). Получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & d_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$ где элемент $d_{n-1,n-1}$ имеет вид:

$d_{n-1,n-1} = n+1+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\dots+\frac{n}{n-1}$. Таким образом, определитель D_n приведен к диагональному виду, $D_n = (n-1)! \cdot d_{n-1,n-1} = (n-1)!\left(n+1+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\dots+\frac{n}{n-1}\right)$.

Под знаком предела получаем:

$\frac{D_n}{n!\ln n} = \frac{1}{n\ln n}\cdot\left(n+1+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\dots+\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n+1}{n\ln n} + \frac{\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i}}{\ln n}$. Предел первого слагаемого, очевидно, равен нулю; найдем предел второго слагаемого

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, где $a_n=\sum\limits_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i}$, $b_n=\ln n$. Применяя теорему Штольца, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{D_n}{n!\ln n}=1$.

Решение 2. Представим последний столбец определителя как сумму двух столбцов и получим представление D_n в виде суммы двух

определителей: $$D_n=\begin{vmatrix}3&1&\dots&\dots&1&1\\1&4&1&\dots&1&1\\1&1&5&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&\dots&n&1\\1&1&\dots&\dots&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1&\dots&\dots&1&0\\1&4&1&\dots&1&0\\1&1&5&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&\dots&n&0\\1&1&\dots&\dots&1&n\end{vmatrix}.$$

Вычитая в первом определителе в правой части равенства последний столбец из всех остальных столбцов и разлагая второй определитель по последнему столбцу, получаем рекуррентную формулу $D_n=(n-1)!+nD_{n-1}$. Отсюда получаем $\frac{D_k}{k!}-\frac{D_{k-1}}{(k-1)!}=\frac{1}{k}$, $k=3,4,\ldots$. (Порядок определителя D_{k-1} равен $k-2\geq 1$). Выпишем полученные равенства для $k=3,\ldots,n$, где

$n-$ произвольное натуральное число не меньше 4: $$\begin{cases}\frac{D_3}{3!}-\frac{D_2}{2!}=\frac{1}{3}\\ \frac{D_4}{4!}-\frac{D_3}{3!}=\frac{1}{4}\\ \dots\\ \frac{D_n}{n!}-\frac{D_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{1}{n}\end{cases}.$$

Складывая все левые и все правые части равенств, получаем

$\frac{D_n}{n!} = \frac{D_2}{2!} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n!\ln n} = \frac{\sum\limits_{i=3}^{n} \frac{1}{i}}{\ln n} = 1$. (Последний предел практически тот же, что в первом решении).

Примечание: сравнивая выражения для определителя D_n, полученные разными способами, легко убедиться в их равенстве, учитывая, что $D_2 = 3$.

Задача 3. Функция $f \in C\big([0;1]\big)$ и дифференцируема на $\big(0;1\big)$; $f(0)=0,\ f(1)=1$. Докажите, что существуют числа $a, b \in (0;1),\ a \neq b,$ такие, что $f'(a)\cdot f'(b) = 1$.

Решение. Функция $f(x)+x$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, причем $f(0)+0=0,\ f(1)+1=2$. Поэтому, по теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции, найдется точка $x_0 \in (0;\,1)$ такая, что $f(x_0)+x_0=1$.

Применяя дифференциальную теорему Лагранжа о среднем значении к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0;1]$, видим, что существует точка $a \in (x_0;1)$ такая, что $f(1)-f(x_0) = f'(a)\cdot(1-x_0)$. Аналогично, также по теореме Лагранжа для функции $f(x)$ на отрезке $[0;x_0]$, получим $f(x_0) = f'(b)\cdot x_0$, где точка $b \in (0;x_0)$. Приравнивая произведение левых частей и произведение правых частей полученных равенств, получим $\big(f(1)-f(x_0)\big)\cdot f(x_0) = f'(a)\cdot f'(b)\cdot(1-x_0)\cdot x_0$. Поскольку $0<x_0<1$, отсюда получаем $f'(a)\cdot f'(b) = \frac{\big(1-f(x_0)\big)\cdot f(x_0)}{x_0\cdot(1-x_0)}$ (здесь заменили $f(1)$ на единицу, согласно условию). Но по выбору точки x_0 выполнено $1-f(x_0)=x_0$, или, что то же самое, $f(x_0)=1-x_0$, поэтому $f'(a)\cdot f'(b)=1$, причем $0<b<x_0<a<1$, то есть $a \neq b$.

Задача 4. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ ненулевые и неколлинеарные. Найдите вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\times(\vec{a}\times\vec{x}) = \vec{a};\ \vec{x}\times(\vec{b}\times\vec{x}) = \vec{b}$.

Решение. Используя представление двойного векторного произведения в виде линейной комбинации векторов, имеем $\vec{x}\times(\vec{a}\times\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}^2-\vec{x}\cdot(\vec{x}\vec{a})=\vec{a}$ (с учетом первого равенства из условия задачи). Отсюда $\vec{a}(\vec{x}^2-1)=\vec{x}\cdot(\vec{x}\vec{a})$. Аналогично, из второго равенства, указанного в условии, получим $\vec{b}(\vec{x}^2-1)=\vec{x}\cdot(\vec{x}\vec{b})$. Но тогда либо обе части обоих равенств нулевые, либо вектор $\vec{x}$ коллинеарен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одновременно. Последнее невозможно, поскольку ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по условию неколлинеарны друг другу. Значит, вектор $\vec{x}$ имеет единичную длину ($\vec{x}^2-1=0$) и $\vec{x}\vec{a}=\vec{x}\vec{b}=0$, то есть вектор $\vec{x}$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому искомый вектор $\vec{x}=\pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$. **Ответ:** условию задачи удовлетворяют два вектора

$$\vec{x}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}.$$

Задача 5. Найдите ранг квадратной матрицы A порядка 8, у которой на главной диагонали сверху вниз стоят числа 1; 0; 1; 1; 3; 0; 0; 7, а все остальные элементы равны 1.

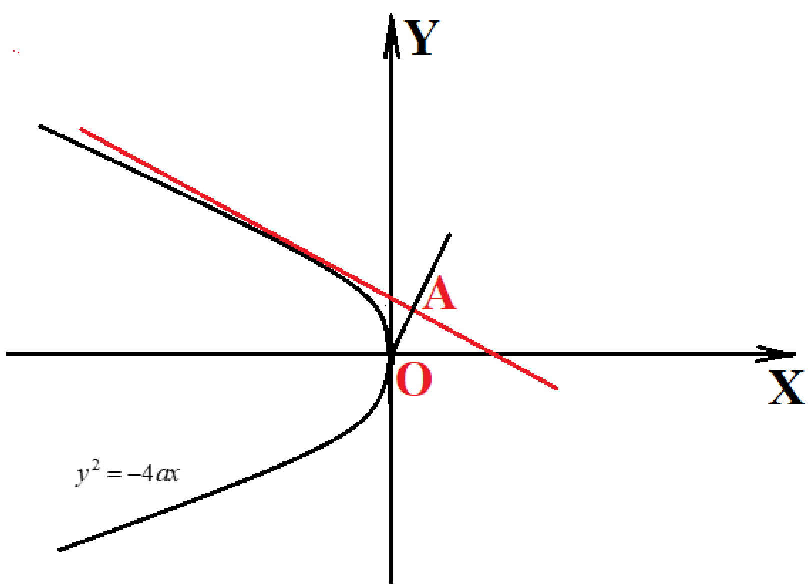
Решение. Рассмотрим матрицу A, совершим в ней линейные преобразования строк и столбцов, не меняющие ранга, а именно: вычтем из 3- й и 4-й строк первую, из 3-го и 4-го столбца первый, получим матрицу $B, rank\ B = rank\ A.$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&3&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&7\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&1&1&1\\1&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&3&1&1&1\\1&1&0&0&1&0&1&1\\1&1&0&0&1&1&0&1\\1&1&0&0&1&1&1&7\end{pmatrix}.$$

Удаляя из матрицы B нулевые строки и столбцы, получим квадратную матрицу C порядка 6, ранг которой равен рангу матриц A и B. Вычитая в матрице C первую строку из всех остальных, приведем её к треугольному виду: $C=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&3&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}$. Очевидно, $|C|=-12\neq 0$. **Ответ:** $rank\,A=6$.

Задача 6. Найдите геометрическое место точек оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы $y^2=-4ax$ на касательные к этой параболе.

Решение.



Для определенности рисунок сделан для $a>0$. Пусть (x_0,y_0) – координаты точки касания. Из уравнения параболы имеем $2y'(x_0)y_0=-4a$, откуда угловой коэффициент касательной равен $y'(x_0)=-\dfrac{2a}{y_0}$. Уравнение касательной имеет вид $y = y_0 - \frac{2a}{y_0}(x - x_0) = y_0 - \frac{2ax}{y_0} + \frac{2ax_0}{y_0}$, то есть $y = \frac{y_0}{2} - \frac{2a}{y_0}x$, поскольку из уравнения параболы видим: $2ax_0 = -\frac{y_0^2}{2}$. Уравнение нормали OA (см. рисунок): $y = \frac{y_0}{2a}x$. Осталось из уравнений касательной и нормали исключить y_0, чтобы получить искомое уравнение, связывающее координаты точки $A(x;y)$, полученной как пересечение касательной и нормали: $\begin{cases} y = \frac{y_0}{2} - \frac{2a}{y_0}x, \\ y = \frac{y_0}{2a}x. \end{cases}$ Выражая из второго уравнения y_0 и подставляя в первое, а потом умножая полученное равенство на xy, получим уравнение третьего порядка $y^2(a - x) = x^3$. Заметим, что производя вычисления, мы считали, что касательная проведена не в вершине параболы, и координаты точки A обе ненулевые: $xy \neq 0$. Но вершина параболы принадлежит множеству точек, уравнение которого мы ищем, и точка $O(0;0)$ удовлетворяет полученному нами уравнению (она не «потеряна»).

Ответ: $y^2(a - x) = x^3$.

Задача 7. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{3x^7 + 4}{\sqrt{x^7 + 6}}dx$.

Решение. $I = \int \frac{3x^7 + 4}{\sqrt{x^7 + 6}}dx = \int \frac{3(x^7 + 6 - 6) + 4}{\sqrt{x^7 + 6}}$. Отсюда искомый интеграл $I = 3I_1 - 14I_2$, где $I_1 = \int \sqrt{x^7 + 6}dx, I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^7 + 6}}$. Применим к I_1 интегрирование по частям: $u = \sqrt{x^7 + 6}, du = \frac{7x^6dx}{2\sqrt{x^7 + 6}}, dv = dx, v = x$. Получим $I_1 = x\sqrt{x^7 + 6} - \frac{7}{2}\int \frac{x^7dx}{\sqrt{x^7 + 6}} = x\sqrt{x^7 + 6} - \frac{7}{2}I_1 + 21I_2$. Отсюда

$I_1=\frac{2}{9}x\sqrt{x^7+6}+\frac{14}{3}I_2$. Подставим последнее выражение для I_1 в найденное выше выражение I через I_1, I_1: $I=\frac{2}{3}x\sqrt{x^7+6}+14I_2-14I_2=\frac{2}{3}x\sqrt{x^7+6}+C, C\in\mathbb{R}$.

Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x^7+6}+C, C\in\mathbb{R}$.

Задача 8. Найдите все комплексные корни уравнения $5iz^4+4z^3-4z+5i=0$, удовлетворяющие условию $|z|=1$.

Решение. Согласно условию $|z|=1$, искомые корни в показательной форме имеют вид $z=e^{i\varphi}$. Подставляя эту форму записи в уравнения и группируя слагаемые, имеем $5i\left(e^{4i\varphi}+1\right)+4\left(e^{3i\varphi}-e^{i\varphi}\right)=0$. Последнее уравнение делим на $e^{2i\varphi}$ и преобразуем полученные в скобках выражения: $e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}=2\cos 2\varphi, e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=2i\sin\varphi$. Сокращая коэффициенты преобразованного уравнения на $2i$, получаем $5\cos 2\varphi+4\sin\varphi=0$, то есть $10\sin^2\varphi-4\sin\varphi-5=0$. Решая квадратное уравнение, находим $\sin\varphi=\frac{2\pm3\sqrt{6}}{10}$, причем легко проверить, что оба корня квадратного уравнения по модулю меньше единицы. Отсюда получаем в ответе четыре комплексных числа. **Ответ:**

$$z=e^{i\varphi}, \varphi\in\left\{\arcsin\frac{2+3\sqrt{6}}{10}, \pi-\arcsin\frac{2+3\sqrt{6}}{10}, \arcsin\frac{2-3\sqrt{6}}{10}, \pi-\arcsin\frac{2-3\sqrt{6}}{10}\right\}.$$