

## Задачи и решения - 2026

### 2 курс

**Задача 1.** Найдите  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{C_{2n}^n n!}{n^n \cdot e^{-n}} \right)^{1/n}$ .

**Решение.** Обозначим  $\left( \frac{C_{2n}^n n!}{n^n \cdot e^{-n}} \right)^{1/n} = A_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \ln A_n &= \frac{\ln((n+1)(n+2)\dots(2n)) - n \ln n + n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n)}{n} + 1 = \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right)}{n} + 1. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое представляет собой верхнюю сумму Дарбу функции  $\ln x$  на отрезке  $[1; 2]$  для его разбиения на  $n$  равных частей. Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln A_n = \int_1^2 \ln x dx + 1 = x \ln x \Big|_1^2 - 1 + 1 = \ln 4, \text{ поэтому } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 4. \text{ Ответ: } 4.$$

**Задача 2.** Решите дифференциальное уравнение  $y'' - 2xy' + x^2y = 0$ .

**Решение.** Будем искать решение в виде произведения двух функций (метод Бернулли):  $y = u(x) \cdot v(x)$ ;  $y' = u'v + uv'$ ;  $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$ . Подставим производные в уравнение:  $u''v + 2u'v' + uv'' - 2x(u'v + uv') + x^2y = 0$ ; сгруппируем слагаемые следующим образом:  $u''v + 2u'(v' - xv') + u(v'' - 2xv' + x^2y) = 0$ .

Возьмем в качестве функции  $v$  решение  $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$  уравнения  $v' - xv' = 0$ . Тогда для  $u$  получим уравнение  $u''v + u(v'' - 2xv' + x^2y) = 0$ , где  $v'' - 2xv' + x^2y = (1 + x^2 - 2x^2 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$ . Таким образом, сокращая на  $e^{\frac{x^2}{2}}$ , получим уравнение  $u'' + u = 0$ , его общее решение  $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

Заметим, что поскольку функция  $e^{\frac{x^2}{2}}$  при всех  $x$  отлична от нуля и бесконечно дифференцируема, любое решение исходного уравнения  $y(x)$  представимо в виде  $y = ue^{\frac{x^2}{2}}$ , где  $u = ye^{-\frac{x^2}{2}}$ . Поэтому, умножая найденное общее решение  $u = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  на  $e^{\frac{x^2}{2}}$ , мы получим общее решение исходного уравнения.

**Ответ:**  $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{\frac{x^2}{2}}$ .

**Задача 3.** Докажите, что любое решение дифференциального уравнения  $(7 + x^2 + \cos(2y))y' = (\operatorname{arctg} x)^6$  ограничено.

**Решение.** Пусть  $y = y(x)$  – решение данного уравнения на некотором промежутке значений  $x$ . Тогда на данном промежутке  $|y'| = y' = \frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{7 + x^2 + \cos 2y} < \frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{1 + x^2}$ . Для любых допустимых  $x_1, x_2$  получаем

$$|y(x_2) - y(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y' dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |y'| dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{1 + x^2} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^6}{1 + x^2} dx = \frac{2}{7} (\operatorname{arctg} x)^7 \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^7}{448},$$

откуда следует ограниченность решения  $y(x)$  на всём промежутке его существования.

**Задача 4.** Найдите сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(n+1)^{2m}}$ .

**Решение.** Зафиксируем  $n$  и вычислим значение  $a_n$  как сумму степенного ряда, используя логарифмический ряд:  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\alpha^m}{m} = -\ln(1 - \alpha)$ ,  $\alpha \in [-1; 1)$ , поэтому

$a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ . Тогда частичная сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  имеет

вид  $S_n = -\sum_{k=1}^n \ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = -\sum_{k=1}^n (\ln k - \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+1))$ , то есть

$$S_n = -\sum_{k=1}^n \left( \ln \frac{k}{k+1} - \ln \frac{k+1}{k+2} \right) =$$

$$= -\left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{2}{3} - \dots + \ln \frac{n-1}{n} - \ln \frac{n}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} \right).$$

Таким образом,  $S_n = \ln 2 + \ln \frac{n+1}{n+2}$ , искомая сумма ряда  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$ .

**Ответ:**  $\ln 2$ .

**Задача 5.** Найдите сумму  $S(x)$  степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , если его коэффициенты образуют последовательность Фибоначчи:  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n = 0, 1, \dots$ . Укажите, при каких значениях  $x$  ряд сходится к найденной функции  $S(x)$ .

**Решение.** Запишем условие на коэффициенты в виде  $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ . Умножим наш ряд на многочлен  $P(x) = 1 - x - x^2$ , получим

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) -$$

$$P(x)S(x) = -(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots) -$$

$$-(a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots)$$

Собирая коэффициенты при каждой степени, видим:

$$P(x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, b_0 = a_0, b_1 = a_1 - a_0, b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n, n = 0, 1, \dots$$

Итого,

$$P(x)S(x) = 1, S(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Заметим, что мы умножали ряд на многочлен, считая ряд сходящимся. Исходя из теории степенных рядов, он сходится на некотором промежутке, симметричном относительно  $x = 0$ . Найдя корни знаменателя и выбирая наименьший из них по модулю, укажем интервал

сходимости ряда  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ . На левом конце промежутка функция  $S(x)$  определена, но ряд расходится (можно представить  $S(x)$  как сумму двух геометрических прогрессий, разложив ее на простейшие, соответствующий ряд Маклорена сходится лишь на открытом интервале). **Ответ:** ряд сходится к функции  $\frac{1}{1-x-x^2}$  на интервале  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ .

**Задача 6.** Найдите  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$ .

**Решение.**  $I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi-t}{1+\sin t} dt$ . Сложим оба выражения интеграла. Отсюда

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \pi \int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \pi \int_0^{\pi} \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{\pi}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \Bigg|_0^{\pi} = \pi.$$

**Задача 7.** Вычислите  $\iint_D \frac{dxdy}{x^3 + y^3}$ , где  $D = \{(x, y) | x + y \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Решение.** Интеграл несобственный; переходя к полярным координатам, получим

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^3 + y^3} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^{+\infty} \frac{rdr}{r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной  $t = \operatorname{tg} \varphi$ , получим следующее выражение для искомого интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \text{ Ответ: } \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Задача 8.** Найдите натуральные решения  $n, n > 1$ , уравнения

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + nx^n} = \frac{1}{n-1} \ln\left(\frac{3+7n}{6n}\right).$$

**Решение.** Найдем интеграл  $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + nx^n}$ , стоящий в левой части уравнения, для произвольного  $n > 1$ . Заметим, что при  $n > 1, x \geq 1$  будет верно  $nx^{n-1} > 1$ , поэтому можем представить подынтегральную функцию с помощью бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{x + nx^n} = \frac{1}{nx^n \left(1 + \frac{1}{nx^{n-1}}\right)} = \frac{1}{nx^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^k x^{(n-1)k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^k x^{(n-1)k+n}}.$$

Интегрируя почленно, получим

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^{k+1} (1 - n(k+1) + k)x^{(n-1)k+n-1}} \Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}}{(k+1)}.$$

Рассмотрим функцию  $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}, |t| < 1$ .

Интегрируя почленно ряд Маклорена функции  $f(t)$ , запишем ту ее первообразную  $F(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} = \ln(1+t)$ , для которой верно равенство  $F(0) = 0$ ,

в виде ряда:  $F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1}$ . Подставляя в эту формулу  $t = \frac{1}{n}$ , используя

полученное выражение для интеграла  $I_n$  и равенство  $F\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , имеем

$I_n = \frac{1}{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Поэтому уравнение из условия задачи имеет вид:

$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{3+7n}{6n}\right)$ . Отсюда  $1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{7}{6}, \frac{1}{2n} = \frac{1}{6}$ . **Ответ:**  $n = 3$ .