УДК 510.23

С. О. Дроздов[[1]](#footnote-1)

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ (К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕКОГО

АППАРАТА ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ)

**Аннотация**

В данной работе введено новое понятие пространственной функции (как отображения множества объемов в евклидовом пространстве на множество чисел) и построено понятие обобщенного дифференциала для такой функции. (Также получена связь между интегралом по объему и обобщенным дифференциалом.) Такое построение необходимо для того, чтобы формализовать часто используемые в физике приемы выделения “элементарных объемов”.

**Вступление**

Прежде чем приступать к сути изложения, приведем исторический очерк развития понятия “бесконечно малых”. Известно, что еще Архимед (3 век до Н. Э.) в своих размышлениях использовал идею составления плоских фигур из линий, а тел – из плоскостей. Первую попытку раскрыть идею Архимеда предпринял Иоганн Кеплер (1571–1630), опубликовав книгу “Новая стереометрия винных бочек”, в которой он разлагал плоские фигуры на бесконечное число бесконечно малых частей. С помощью этого подхода ему удалось не только получить результаты, достигнутые Архимедом, но и вычислить объемы 87 новых тел вращения (см. [1]). Впоследствии в этой области работало множество математиков, самые знаменитые из них – Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц. Эти ученые внесли огромный вклад в развитие математики; при этом, как в работах Ньютона, так и в работах Лейбница использовалось понятие “актуально бесконечно малой величины”. Проблема заключалась в том, что не представлялось возможным строго сформулировать, что эта величина собой представляет. И только к началу XIX столетия был построен фундамент математического анализа, основанный на строго сформулированном понятии предела.

Возвращаясь к сути работы, необходимо констатировать, что во многих современных, в том числе, очень хороших, учебниках по физике, авторы нередко следуют обозначениям и терминологии Ньютона и Лейбница, используя такие понятия, как “бесконечно малая длина”, “элементарный объем” и т.д. Например, в [2] написано: “Суммирование бесконечно малых означает интегрирование”. Аналогичные высказывания можно найти в [3], [4].

Мотивация данного исследования заключается в необходимости уточнения подобных математических понятий, часто используемых в курсах физики. Приведем простые примеры рассуждений, иллюстрирующих существующую проблему.

**Пример №1.** Рассмотрим прямолинейное движение точки с переменной скоростью. За бесконечно малое время *dt* точка пройдет путь . Так как бесконечно малых чисел (в силу аксиомы Архимеда) не существует [5, с.11], требуется объяснить, что имеется в виду. Это не сложно сделать: *dx* – это просто дифференциал функции *x*(*t*). Его можно называть “бесконечно малым приращением” в том смысле, что без конца уменьшая интервал времени *dt*, мы сколь угодно точно можем аппроксимировать реальное приращение дифференциалом . Тут все математически строго и физически понятно.

**Пример №2.** Теперь перейдем к другой задаче: пусть требуется найти массу тела с неравномерным распределением плотности. Рассмотрим бесконечно малый объем , его масса . После чего просуммируем интегралом массы элементарных объемов и найдем массу камня как . Интуитивно у читателя может сложиться мнение, что речь идет, в согласии с идеями Лейбница, о том, что мы рассмотрели актуально бесконечно малый объем, а потом взяли и как-то просуммировали бесконечное количество бесконечно малых чисел. (А, как уже отмечалось, на введенной числовой оси бесконечно малых чисел не существует). Более того, нам не удастся, как в примере №1, сказать, что это дифференциал функции , хотя бы потому, что не является числовой функцией. (Действительно, масса выделенного объема зависит не только от его величины, но и от способа выбора этого объема в пространстве). Несмотря на это, понятно, что, если мы возьмем очень маленький объем, его масса будет почти равна . И хотя физически понятно, что значит – берем малые объемы, и чем меньше, тем лучше, математически требуется строго сформулировать, о чем идет речь.

Можно также отметить, что ровно такие же, как с массой, проблемы возникают с теплотой, с моментом инерции , с энергией сжатия упругого тела и вообще с любыми величинами, которые описывают объемное или поверхностное распределение некоторой физической величины.

**Постановка проблемы:**

Таким образом, необходимо рассмотреть отображение множества объемов пространства на множество чисел, после чего определить “главную часть” для таких отображений и связать ее с понятием интеграла.

**Существующие решения:**

1. Самым интересным решением всех подобных проблем является нестандартный анализ, в рамках которого действительная числовая ось расширяется до гипердействительной, на которой вводятся бесконечно малые и большие числа. Для знакомства с этой темой можно, например, прочитать книги [5] и [6].
2. Также есть рассмотрение дифференциального исчисления с более общей точки зрения, о которой написано, в частности, в книге [7]. В ней рассматривается понятие топологического пространства, с помощью которого в общем виде говорится о пределе отображения, используя которое, можно разрешить указанные ранее математические трудности.

У вышеназванных решений есть один веский недостаток: значительная сложность. В нашем исследовании обнаружена новая, более простая возможность – предложено строгое построение математических понятий, позволяющих формализовать существующее изложении физики.

**Предлагаемое решение:**

Пусть X – измеримое множество точек в евклидовом пространстве, V – объем рассматриваемого множества. Введем несколько определений.

**Определение разбиения измеримого множества точек евклидового пространства X.**

Пусть X – измеримое множество точек Евклидового пространства. Семейство непустых множеств , где N – количество элементов разбиения, назовем разбиением множества X если: 1) , 2), 3)измеримо.

**Определение пространственной функции:**

Пространственной функцией назовем закон, ставящий в соответствие множеству X число таким образом, что для любого измеримого подмножества множества X определено значение причем для любого разбиения множества X на подмножества выполняется .

**Определение плотности пространственной функции в точке:**

Выберем произвольную точку множества X с радиус-вектором . Зададим последовательность сужающихся объемов к этой точке, максимальный диаметр . Таким образом получим последовательность ). Если существует конечный предел

 = , причем он не зависит от способа выбора сужающихся объемов, то назовем число = плотностью пространственной функции множества X в точке .

**Определение бесконечно малой обобщенной функции в точке:**

Назовем пространственную функцию o(V) множества X бесконечно малой функцией в точке , по сравнению с V, если =0.

**Теорема:** Выражение = , равносильно .

**Доказательство:**

, рассмотрим обобщенную функцию: –

 = - = 0, откуда, по определению, + o(δV)

 + o(δV)

 o(δV) => =0 => =

**Определение:** в равенстве + o(δV), слагаемое обозначим: d= (dV ) и назовем обобщенным дифференциалом пространственной функции в точке .

**Теорема:** если d= в любой точке множества X, то верно:

**Доказательство:**

Последнее равенство написано по определению тройного интеграла, согласно книге [8].

**Заключение:**

В сформулированных терминах теперь можно говорить, что масса “бесконечно малого” элемента (или “бесконечно малая часть” любой другой пространственно-распределенной характеристики) математически является обобщенным дифференциалом, после чего, в согласии с доказанной нами теоремой, можно переходить к интегралу.

Построенное нами дополнение к интегрально-дифференциальному исчислению, с одной стороны, позволяет достигать строгости в физических рассуждениях, а с другой стороны, не требует большой математической подготовки потенциального читателя, которым может быть студент младших курсов, изучающий физику и математику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, Том 1, М:— Издательство Наука, 1968, 434 с.

2. В.В.Алексеев, Л.И. Маклаков, Курс общей физики, Том 1, — Издательствово Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2013, 126 с.

3. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Таисия Ивановна Трофимова. — 11-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2006. — 560 с

4. Краткий курс термодинамики / В.Е. Белонучкин. — М.: МФТИ, 2010. — 164 с.

5. В.А. Успенский, Что такое нестандартный анализ? — М: Наука, 1987, 125 с.

6. М. Девис, прикладной нестандартный анализ, — М: издательство Мир, 1980, 236 с.

7. В.А. Зорич, Математический анализ, часть 2, — М: МЦНМО, 2019, 688 с.

8. А.П.Аксенов, Математический анализ Часть 2, — СПБ: издательство Политехнического университете, 2009, 763 с.

1. С. О. Дроздов, x.xl2016@yandex.ru [↑](#footnote-ref-1)