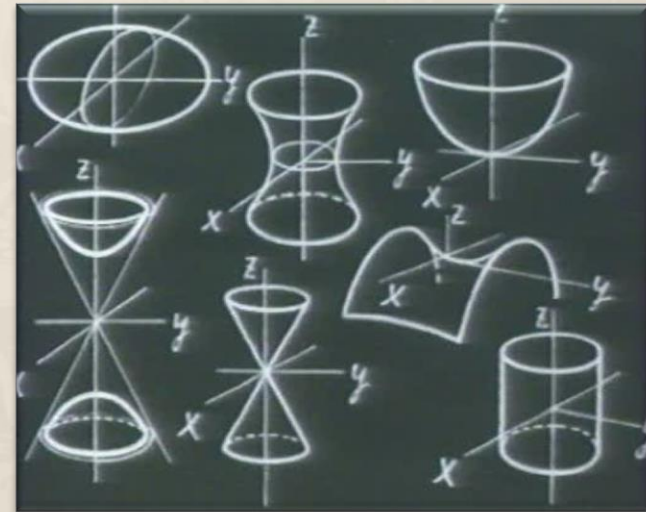


Раздел 3

Аналитическая геометрия

Поверхности второго порядка

- Общее уравнение ПВП
- Эллипсоид
- Гиперболоиды
- Конус второго порядка
- Параболоиды
- Цилиндрические поверхности



Общее уравнение поверхности второго порядка

Уравнение

$$Ax^2 + 2By^2 + 2Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$, является уравнением поверхности второго порядка (ПВП).

Примеры

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

уравнение сферы

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

уравнение прямого
кругового цилиндра

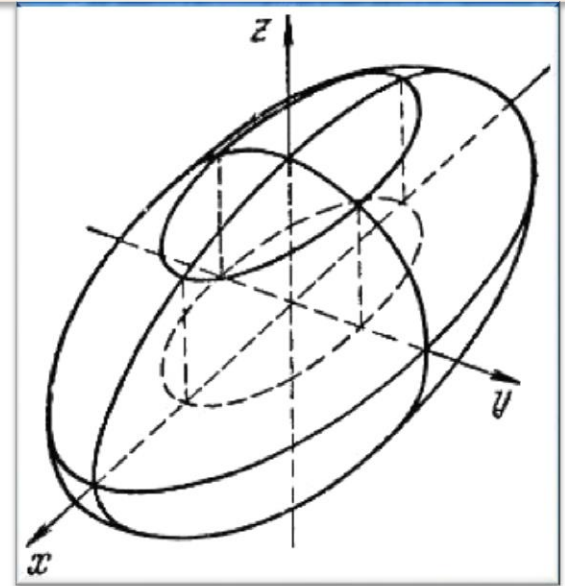


Эллипсоид

Эллипсоид – поверхность второго порядка, уравнение которой в подходящей системе координат имеет вид:

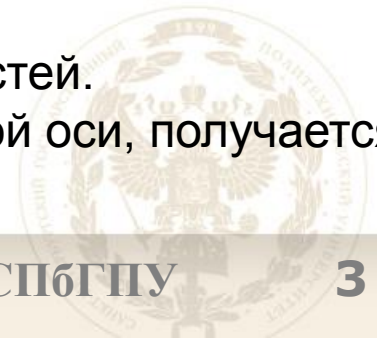
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

каноническое уравнение
эллипсоида



Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной любой координатной оси, получается эллипс.



Гиперболоиды

Гиперболоиды – поверхности второго порядка, уравнение которых в подходящей системе координат имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

двуполостный гиперболоид

Гиперболоиды обладают:

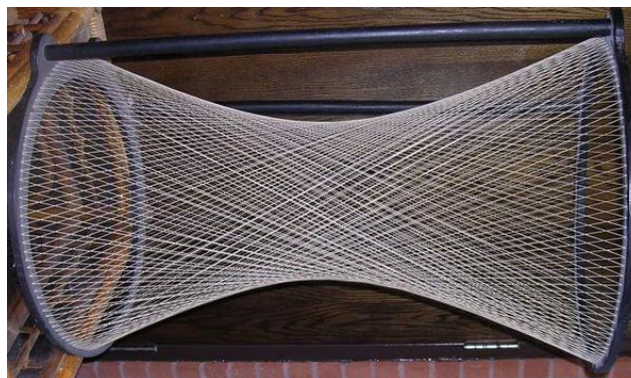
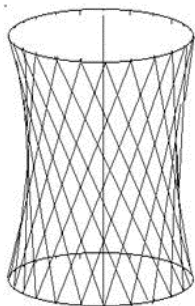
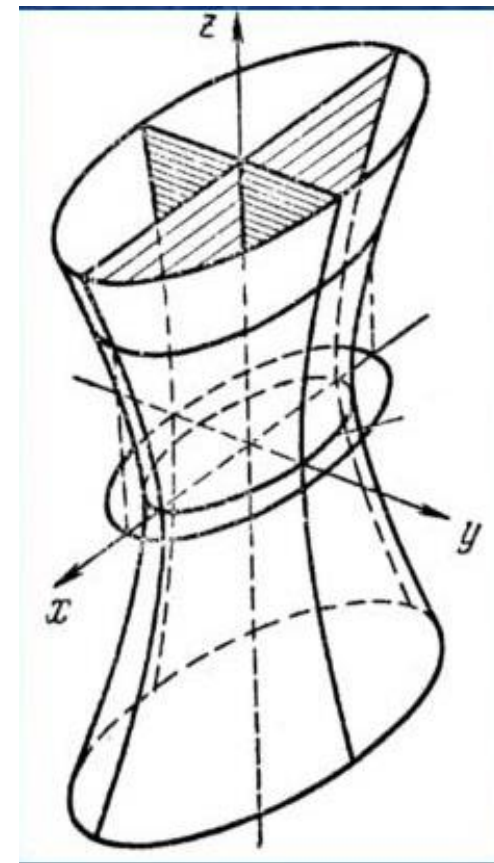
- ❑ центральной симметрией относительно начала координат;
- ❑ осевой симметрией относительно координатных осей;
- ❑ плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.



Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получаются эллипсы.
- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получаются гиперболы.
- ❑ Однополостный гиперболоид – линейчатая поверхность.





Шуховская башня в Москве
строительство 1920 – 1922
высота 160 м



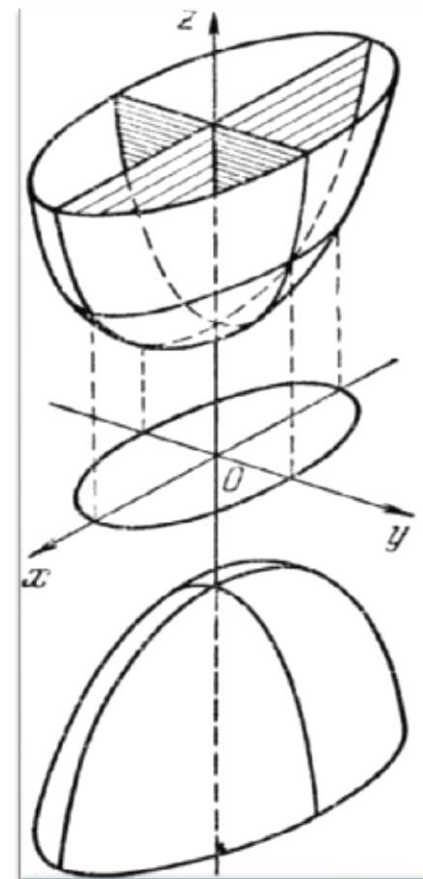
Телебашня в Гуанчжоу (Китай)
строительство 2005 – 2009
высота 600 м



Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

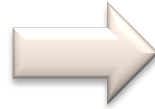
- ❑ $|z| \geq c$.
- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получаются эллипсы.
- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получаются гиперболы.



Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

$$d > 0$$



однополостный гиперболоид

$$d < 0$$



двуполостный гиперболоид

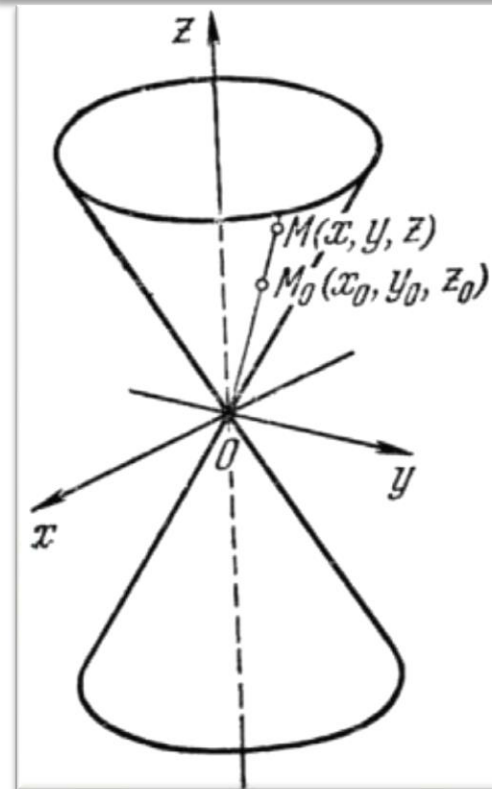
$$d = 0$$



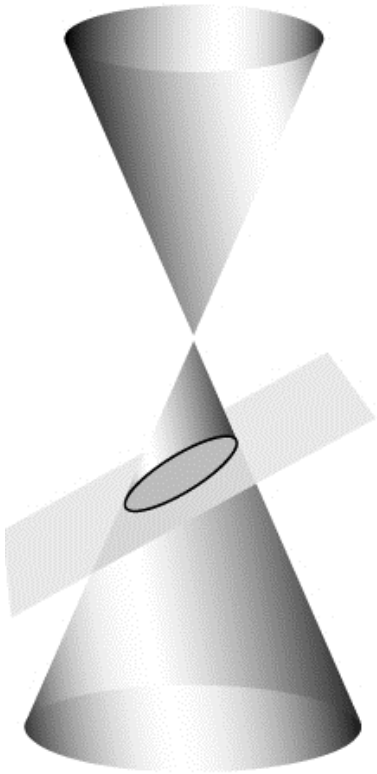
?

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

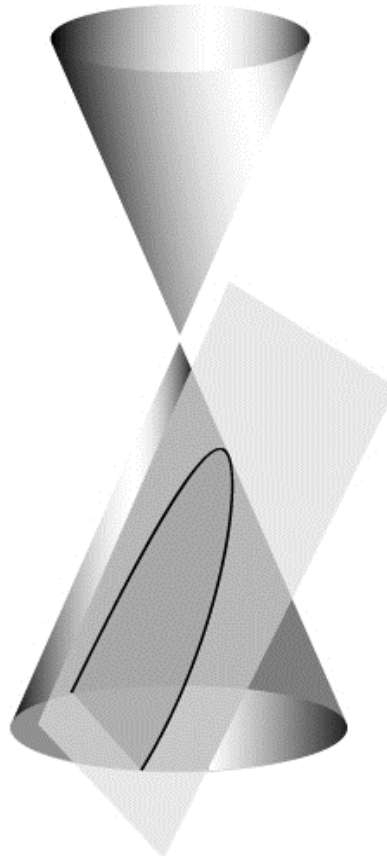
конус второго порядка



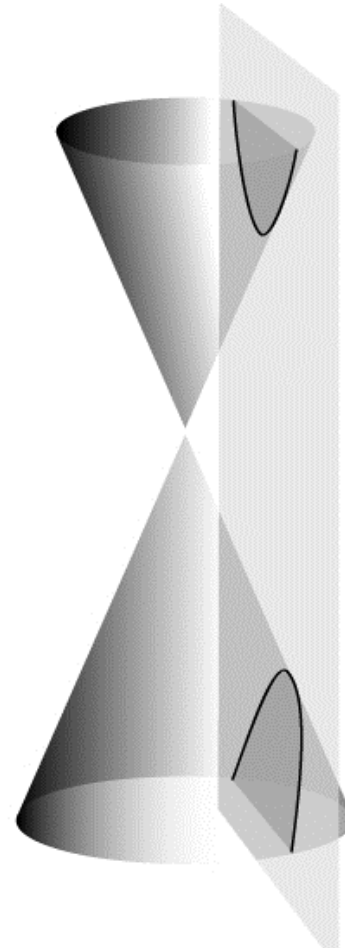
Конические сечения



эллипс



парабола



гипербола



Параболоиды

Параболоиды — поверхности второго порядка, уравнение которых в подходящей системе координат имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

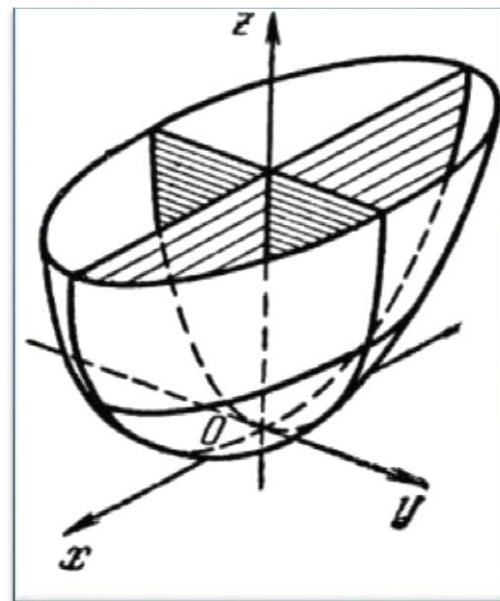
гиперболический параболоид



Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

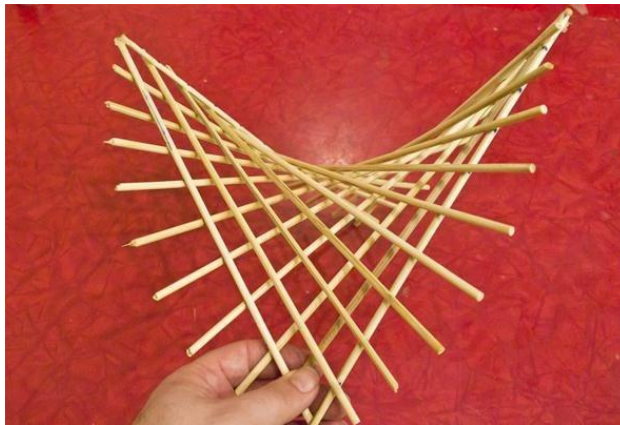
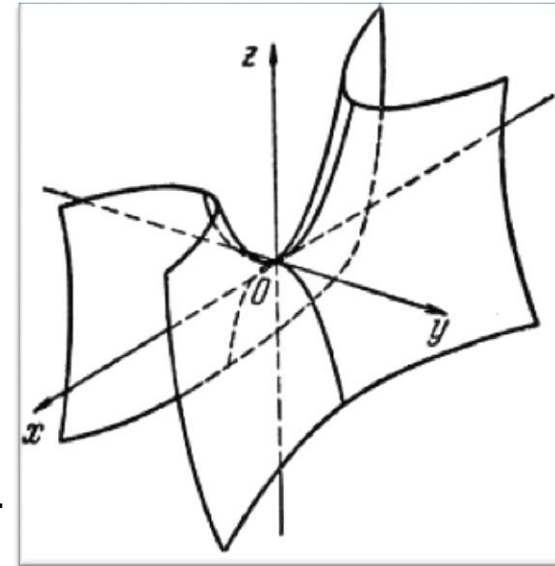
- $z \geq 0$
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получаются эллипсы.
- В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получаются параболы.



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

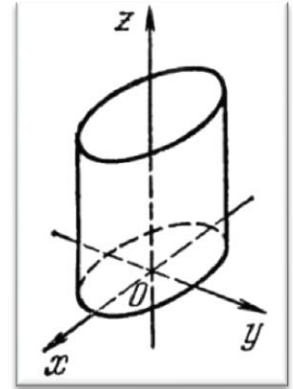
- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси аппликат, получаются гиперболы.
- ❑ В сечении плоскостью, перпендикулярной оси ординат или оси абсцисс, получаются параболы.
- ❑ Гиперболический параболоид – линейчатая поверхность.



Цилиндрические поверхности

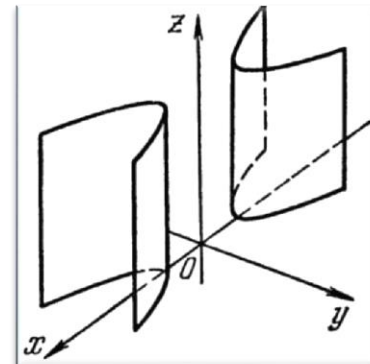
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллиптический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболический цилиндр



$$y^2 = 2px$$

параболический цилиндр

