Н. В. Филимоненкова

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

**Допущено НМС по математике в качестве учебного пособия
для студентов технических направлений бакалавриата и направлений
«Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика»
технических вузов**

Санкт-Петербург 2015

Рецензенты: д-р. физ.-мат. наук, профессор Б. Г. Вагер (СПбГАСУ); канд. физ.-мат. наук, доцент Ф. Л. Бахарев (СПбГУ).

Конспект лекций предназначен студентам технических вузов для изучения вводного курса в функциональный анализ. Изложение материала учитывает специфику подготовки студентов в техническом вузе и имеет прикладную ориентацию. Пособие содержит краткие теоретические сведения об основных модулях функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. В центре внимания приложение теории к известным вычислительным методам: решение уравнений разного типа методом простых итераций, аппроксимация функций различными ортогональными базисами, минимизация функционала методом Ритца, решение линейных операторных уравнений дифференциального и интегрального типа приближенными методами, в частности методом Галёркина. Данное пособие не является независимым изданием, рекомендуется его использовать в сочетании со сборником задач по функциональному анализу того же автора.

Табл. 5. Ил. 16. Библиогр: 12 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения функционального анализа являются в основном пространства функций и их отображения, откуда и происходит название дисциплины. Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики сложился в начале 20 века в результате обобщения конструкций математического анализа, линейной алгебры и геометрии. С тех пор его идеи и методы проникают во все области математики, физики и в прикладные науки на правах мощной обобщающей теории и удобного инструмента исследования конкретных задач.

Для студента технического вуза этот курс имеет две главные цели. Первая заключается в освоении языка функционального анализа, который широко используется в современном математическом моделировании. Вторая цель состоит в уяснении прикладной роли функционального анализа, которая сводится к аналитическому обоснованию эффективной работы численных методов.

Предлагаемый конспект лекций является частью учебного комплекса, включающего также сборник задач. Комплекс может быть использован в высшем профессиональном образовании для направлений подготовки 231300 «Прикладная математика», 230100 «Информатика и вычислительная техника», 010400 «Прикладная математика и информатика», 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 010800 «Механика и математическое моделирование», 010900 «Прикладные математика и физика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Он предназначен для методического обеспечения вводного курса функционального анализа, рассчитанного на небольшое количество аудиторных часов (51 – 102) и средний уровень базовой математической подготовки студентов технических вузов.

В данном учебном комплексе проведена значительная адаптация классического курса функционального анализа к специфике профессиональной подготовки математика-инженера, математика-программиста. При разработке комплекса были поставлены и решены следующие задачи. Во-первых, адаптация материала к уровню подготовки и аналитических способностей студентов. Во-вторых, модернизация курса под использование электронных вычислительных средств (что отражено в первую очередь в сборнике задач). В-третьих, культивирование прикладной составляющей дисциплины, которое осуществляется за счет сочетания функционального анализа и вычислительной математики: реализована идея довести абстрактный теоретический факт до числа. Наиболее оригинальной частью комплекса является сборник задач, его характеристика приводится во введении к сборнику.

Опишем некоторые особенности предлагаемого конспекта лекций. Он содержит краткие теоретические сведения об основных традиционных модулях функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. Большинство параграфов снабжены предисловием, указывающим на «грубый» смысл предложенных конструкций, на связь с их предтечами из математического анализа, геометрии или линейной алгебры и на некоторые из ярких приложений в естествознании и технологиях. Изложение теоретических конструкций упрощено до элементарного при попытке сохранить классическое качество данной дисциплины и не упустить идеологию происходящего. Курс не претендует на полноту и замкнутость в изложении теории, но делает акцент на алгоритмическую составляющую функционального анализа. В каждом модуле сюжетная линия проходит путь от введения основных понятий к доказательству ключевых теорем, имеющих прямой выход к широко известным вычислительным методам.

Первый модуль посвящен метрическим пространствам и сжимающим операторам. Он завершается обзором ситуаций, в которых возможно применение принципа сжимающих операторов и метода простых итераций для приближенного решения уравнений разного типа: числовых уравнений, систем линейных алгебраических уравнений, функциональных нелинейных уравнений общего вида, интегральных уравнения Фредгольма и Вольтерры.

Второй модуль представляет теорию рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Значительное внимание уделено разнообразию ортогональных систем: тригонометрических, полиномиальных, систем ступенчатых функций. Модуль завершается описанием связи ряда Фурье с задачами аппроксимации и пояснением таких существенных особенностей, как характер сходимости ряда Фурье, специфика тригонометрической и полиномиальной аппроксимации, различия между рядами Фурье и Тейлора.

Третий модуль посвящен теории линейных операторов и захватывает смежные вопросы оптимизации функционалов. Изложение ориентировано на проблему точного и приближенного решения операторных уравнений. Возможности инструментария, который предоставляет теория линейных операторов, продемонстрированы на двух классических примерах: интегральном операторе Фредгольма и дифференциальном операторе Штурма – Лиувилля. Изложение завершается описанием вариационного и проекционного подходов к приближенному решению линейных операторных уравнений. Подробно разобраны метод наименьших квадратов и метод Галёркина. Кроме того, в третьем модуле есть и другие выходы к вычислительной математике, представленные в разных параграфах: поиск решения уравнения в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора, решение интегрального уравнения методом замены ядра на вырожденное, приближенная минимизация функционала методом Ритца.

При организации учебного процесса рекомендуется дополнять изучение конспекта лекций использованием сборника задач, где продемонстрирована численная реализация большинства теоретических структур и методов. В конспекте лекций есть ссылки на сборник задач. В сборнике задач каждое задание сопровождается указанием на определенные места в конспекте лекций, содержащие теоретическую справку по теме задания.

Список литературы, помещенный в конце конспекта лекций, содержит учебники и монографии, дополняющие изложенный здесь материал по отдельным, как правило, узким направлениям. В тексте имеются ссылки, отмечающие целесообразность обращения к тому или иному источнику из списка литературы для более глубокого знакомства с предметом обсуждения. Отметим, что в целом предлагаемый конспект лекций наиболее близок по духу к учебнику по функциональному анализу [1] профессора В. И. Лебедева.

Изучение основ функционального анализа по данному пособию предполагает, что читатель владеет базовыми знаниями в области математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработка учебного комплекса основана на опыте преподавания функционального анализа студентам специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ). Автор благодарен студентам СПбГАСУ Алине Шиминой и Станиславу Ткачеву за помощь в подготовке пособий, профессору МГУ Анатолию Григорьевичу Яголе и профессору СПбГУ Нине Михайловне Ивочкиной за ценные замечания и советы.

Модуль I. ТЕОРИЯ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Список основных пространств

В этот список включены пространства, которые используются на протяжении всего текста. В дальнейшем обозначения этих пространств употребляются без дополнительных пояснений.

1. Пространство вещественных чисел R. Говоря о числах (скалярах), всегда будем подразумевать вещественные числа, хотя в более общем случае теорию функционального анализа строят на основе комплексных чисел.

2. Пространство n-мерных числовых векторов R^n.
   Пространство R^n состоит из векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, где $x_k \in R$, $k=1,2,3,...,n$. Числа x_k – координаты вектора.

3. Пространство числовых матриц $M_{m\times n}$ размера $m\times n$.
   Это пространство состоит из матриц $\mathrm{A}=(a_{ij})$, где $a_{ij}\in R$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей l^p, $1\le p\le\infty$.
   Пространство l^p, $1\le p<\infty$, состоит из бесконечных числовых последовательностей $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, *суммируемых* со степенью p:
   $$x\in l^p \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty.$$
   В частности,
   $$x\in l^1 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty,$$
   $$x\in l^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty.$$
   Пространство l^∞ состоит из *ограниченных* числовых последовательностей:
   $$x\in l^\infty \quad\Leftrightarrow\quad \exists c\ge 0:\ |x_k|\le c,\ k=1,2,3...$$
   Числа x_k называем элементами, членами или координатами числовой последовательности по аналогии с координатами векторов. Договоримся использовать для числовой последовательности x разные формы записи: компактную $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и развернутую $x=(x_1,x_2,...,x_k,...)$, причем для отделения координат последовательности друг от друга используем как запятые, так и пробелы.
   При натуральных значениях p пространства бесконечных числовых последовательностей упорядочены по включению следующим образом:
   $$l^1\subset l^2\subset l^3\subset l^4\subset ...\subset l^\infty.$$

5. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k[a;b]$, $k=0,1,2,3,...$
   Рассмотрим конечный отрезок $[a;b]$.
   Пространство $C[a;b]$, которое иногда еще обозначают символом $C^0[a;b]$, состоит из функций $x=x(t)$, *непрерывных* на отрезке $[a;b]$:

$$x \in C[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x(t) \text{ определена в каждой точке отрезка } [a;b], \\ \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \text{ для любой точки } t_0 \in (a;b), \\ \lim\limits_{t \to a+0} x(t) = x(a), \quad \lim\limits_{t \to b-0} x(t) = x(b). \end{array}$$

Пространство $C^k[a;b]$, $k = 1,2,3,\ldots$, состоит из функций $x = x(t)$, которые k раз *непрерывно дифференцируемы* на отрезке $[a;b]$. Это значит, что функция $x = x(t)$ имеет непрерывные производные вплоть до порядка k:

$$x(t) \in C^k[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x^{(k)}(t) \in C[a;b].$$

В частности,

$$x(t) \in C^1[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x'(t) \in C[a;b],$$
$$x(t) \in C^2[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x''(t) \in C[a;b].$$

Функции $x \in C^1[a;b]$ часто называют *гладкими*, функции $x \in C^k[a;b]$ тоже иногда называют *гладкими с порядком гладкости* k. Пространство функций бесконечной гладкости $C^\infty[a;b]$ состоит из функций, которые непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз. Все пространства $C^k[a;b]$ упорядочены по включению следующим образом:

$$C[a;b] \supset C^1[a;b] \supset C^2[a;b] \supset C^3[a;b] \supset \ldots \supset C^\infty[a;b].$$

Кроме того, называем функцию $x = x(t)$ *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция непрерывная. Называем функцию $x = x(t)$ *кусочно-гладкой* на отрезке $[a;b]$, если отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция гладкая.

6. Пространства Лебега $L^p(a;b)$, $1 \le p \le \infty$.

Названы в честь французского математика первой половины 20 века Анри Лебега.

Рассмотрим конечный или бесконечный промежуток $(a;b)$.

Пространство $L^p(a;b)$, $1 \le p < \infty$, состоит из функций $x = x(t)$, *суммируемых (интегрируемых)* со степенью p на промежутке $(a;b)$:

$$x(t) \in L^p(a;b) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

В частности,

$$x(t) \in L^1(a;b) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b |x(t)| dt < \infty,$$

$$x(t) \in L^2(a;b) \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b x^2(t) dt < \infty.$$

Иногда говорят, что пространство $L^2(a;b)$ состоит из *квадратично суммируемых функций*.

При стремлении показателя p к бесконечности пространство $L^p(a;b)$ преобразуется в пространство $L^\infty(a;b)$, состоящее из *ограниченных* функций на промежутке $(a;b)$:

$$x(t) \in L^\infty(a;b) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \ge 0: \ |x(t)| \le c, \ t \in (a;b).$$

Заметим, что функция, непрерывная на конечном отрезке, ограничена на нем и интегрируема с любым показателем p. Можно показать, что для конечного промежутка $(a;b)$ все пространства, определенные пунктами 5, 6 образуют цепочку включений:

$$L^1(a;b) \supset L^2(a;b) \supset \ldots \supset L^\infty(a;b) \supset C[a;b] \supset C^1[a;b] \supset C^2[a;b] \supset \ldots \supset C^\infty[a;b].$$

Отметим, что представленное здесь описание пространств Лебега не является строгим. Для простоты изложения и практического использования опущено несколько теоретических нюансов. Укажем лишь некоторые.

В определении и в других структурах пространств $L^p(a;b)$ используется интеграл Лебега, который, вообще говоря, отличается от привычного интеграла Римана. Однако для достаточно широкого класса функций интегралы Лебега и Римана дают одинаковый результат. В предлагаемом конспекте лекций и в сборнике задач для всех вычислений, связанных с пространствами $L^p(a;b)$, можно применять интеграл Римана, определенный или несобственный.

Кроме того, понятие элементов пространства $L^p(a;b)$ нуждается в уточнении. В конструкции этих пространств главную роль играет процесс интегрирования. Значение интеграла Лебега не меняется при изменении подынтегральной функции в отдельно взятой точке, или в нескольких точках, или на множестве нулевой длины. В связи с этим равенство двух функций понимается особым образом. Говорят, что какое-то соотношение выполняется почти всюду на промежутке $(a;b)$, если оно выполняется для всех $t \in (a;b)$ за исключением, может быть, множества нулевой длины. Если $x(t) = y(t)$ почти всюду на $(a;b)$, то считается, что $x = y$ в пространстве $L^p(a;b)$. Поэтому, строго говоря, элементами пространства $L^p(a;b)$ являются классы функций. Точно так же ограниченность функции в пространстве $L^\infty(a;b)$ понимается в следующем смысле: $|x(t)| \le c$ почти всюду на $(a;b)$. Поэтому полное название пространства $L^\infty(a;b)$ звучит так: пространство существенно ограниченных функций.

Более основательное описание интеграла Лебега и пространств Лебега дают академические учебники по функциональному анализу, например, [2], [3], [4].

В завершение параграфа отметим, что в представленном списке пространства $C^k[a;b]$, $L^p(a;b)$ состоят из функций и потому называются *функциональными*. Пространства l^p состоят из числовых последовательностей, тем не менее их тоже относят к функциональным, поскольку последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ можно считать функцией натурального аргумента $x(k)$. Легко заметить сходство между пространствами l^p и $L^p(a;b)$. Операция суммирования в пространстве l^p является дискретным аналогом операции интегрирования в пространстве $L^p(a;b)$. Главным предметом исследования для функционального анализа являются именно функциональные пространства и их отображения.

Примеры функций и последовательностей, принадлежащих основным пространствам данного курса, представлены в сборнике задач, № 1 – 8.

§ 2. Метрические пространства

Как и многие структуры абстрактной математики, метрика восходит к простому геометрическому понятию – расстоянию между двумя точками A и B на плоскости. Его можно измерить через длину отрезка AB. Очевидно, такой способ измерения расстояния не всегда удобен: например, он не годится в условиях передвижения по городу, где хотелось бы учитывать расположение улиц и скорость разных видов транспорта. Таким образом, для расстояния требуется адекватное обобщение, предоставляющее возможность вычислять его в разных ситуациях по-разному. Самое общее понятие метрики (расстояния) и метрического пространства было введено в начале 20 века французским математиком Морисом Фреше. Метрика как способ измерять, насколько один объект отличается от другого, важна для построения математических моделей самых разных процессов. Например, в микробиологии возникает необходимость определять расстояние между цепочками ДНК; в квантовой физике – между состояниями электронов в атоме; в процессах передачи информации подходящие метрики используются для идентификации и сглаживания помех, т.е. случайных отклонений функции на определенное расстояние от заданной траектории. Также метрики применяются в задачах кодирования и распознавания сообщений. Например, для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google.

2.1. Понятие метрики

Определение 2.1

Множество X называется *метрическим пространством*, если для всех его элементов определена такая числовая функция $\rho(x, y)$ двух аргументов, что для любых $x, y, z \in X$ выполняются три аксиомы:

I. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

III. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называют также точками, функцию $\rho(x, y)$ – *метрикой* или *расстоянием* между точками x и y.

Иногда будем помечать метрику индексом X, т.е. $\rho_X(x, y)$, чтобы указать, о каком именно пространстве точек идет речь. На одном и том же множестве X могут быть заданы разные метрики. Перечисленные аксиомы I – III согласуются с обыденным представлением о свойствах расстояния. Аксиома III имеет существенное значение, когда точки x, y, z попарно различны, в противном случае она следует из двух предыдущих аксиом.

Упражнение. Пусть $\rho(x, y)$ – некоторая метрика в пространстве X. Доказать, что функции $\tilde{\rho}(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$, $\hat{\rho}(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ тоже задают метрики в этом пространстве.

Определение 2.2

Пусть X – метрическое пространство. *Шаром* с центром в точке $x \in X$ и радиусом $r \in R$ называется множество $B_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$. Множество $\Omega \subset X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

2.2. Примеры метрических пространств

1. Пространство изолированных точек с дискретной метрикой.

Рассмотрим произвольное множество X . Определим в нем расстояние между точками следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, \ x \neq y \\ 0, \ x = y \end{cases}$$

Расстояние между различными элементами принимается равным единице независимо от природы этих элементов и от их геометрической интерпретации. Тем не менее, такое расстояние удовлетворяет аксиомам метрики, это нетрудно проверить:

I. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

III. $\underbrace{\rho(x, y)}_{=1} \leq \underbrace{\rho(x, z) + \rho(z, y)}_{=2}$ для различных x, y, z.

Это пример самой примитивной метрики, реагирующей только на отличие точек друг от друга.

2. Пространство вещественных чисел R.

Расстояние между числами $x, y \in R$ вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Аксиомы метрики соответствуют элементарным свойствам модуля вещественных чисел:

I. $|x - y| \geq 0$, причем $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $|x - y| = |y - x|$;

III. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Шар с центром в точке x и радиусом r представляет из себя интервал длины $2r$:

$$B_r(x) = \{y \in R : |x - y| < r\} = (x - r; x + r).$$

3. Пространство n-мерных числовых векторов R^n.

В этом пространстве могут быть заданы разные метрики. Приведем три основные:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Исследуем свойства этих метрик на примере пространства R^2. Выясним, как вычисляется расстояние между точками и как выглядит единичный шар с центром в нуле. Пусть $x = (2, 3)$, $y = (10, 7)$.

В метрике ρ_1 : $\rho_1(x, y) = |2 - 10| + |3 - 7| = 12$ (рис. 1),

$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\}$ (рис. 2).

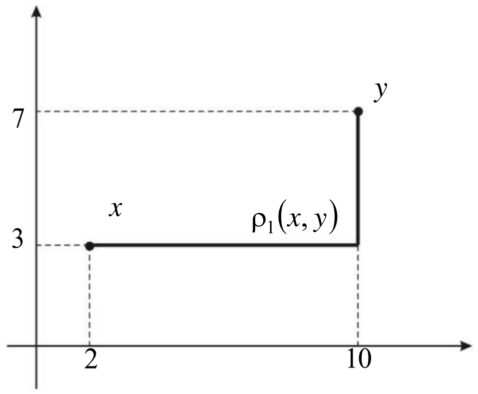

Рис. 1

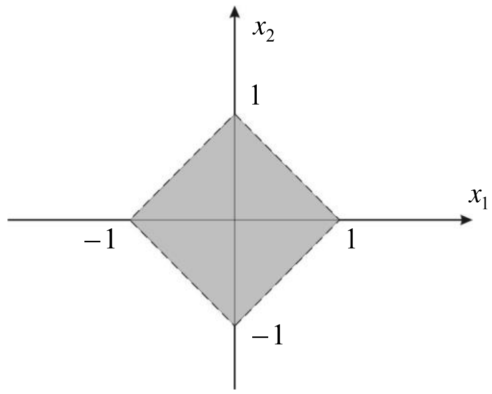

Рис. 2

В метрике ρ_2 : $\rho_2(x, y) = \sqrt{(2-10)^2 + (3-7)^2} = 4\sqrt{5}$ (рис. 3),

$$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \text{ (рис. 4).}$$

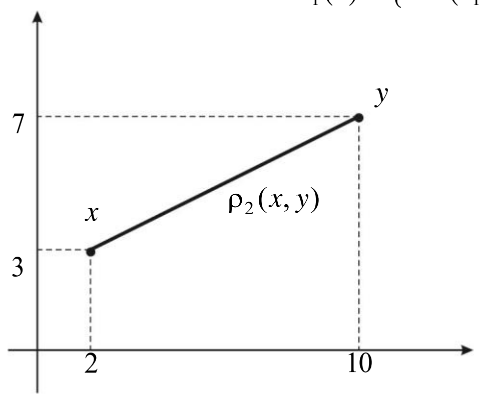

Рис. 3

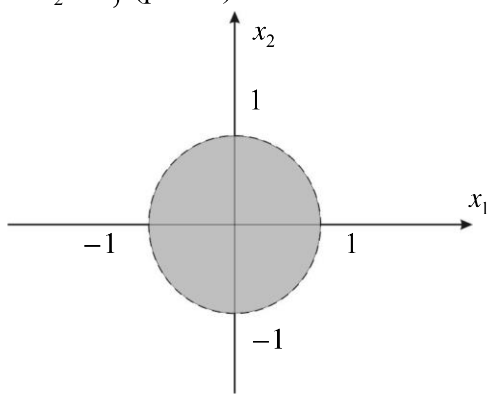

Рис. 4

В метрике ρ_∞ : $\rho_\infty(x, y) = \max\{|2-10|, |3-7|\} = 8$ (рис. 5)

$$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} \text{ (рис. 6).}$$

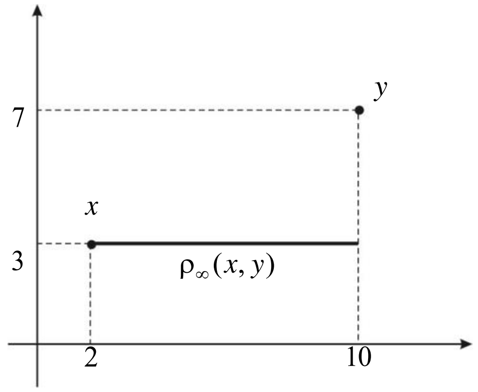

Рис. 5

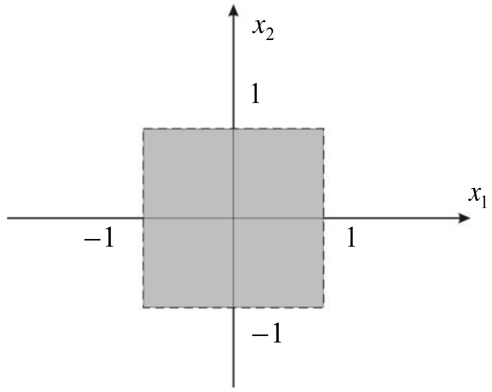

Рис. 6

По рисункам 1, 3, 5 видно, что метрика ρ_1 вычисляет длину пути из точки x в точку y, если двигаться параллельно координатным осям. Таким образом задают метрику в городе с прямоугольным расположением улиц, иногда называют манхэттенским расстоянием. Метрика ρ_∞ определяет наибольшее отклонение между координатами векторов x и y. Метрика ρ_2 вычисляет длину отрезка, соединяющего точки x и y. Это привычный способ измерения расстояния в евклидовой геометрии, поэтому метрику ρ_2 называют евклидовой.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей l^p.
Для конечного p расстояние определено формулой

$$\rho_{l^p}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{l^1}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|,$$

$$\rho_{l^2}(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}.$$

Метрика пространства l^∞ получается из метрики пространства l^p при $p\to\infty$:

$$\rho_{l^\infty}(x,y)=\sup_{1\le k<\infty}|x_k-y_k|.$$

5. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k[a;b]$.
Расстояние определено формулой

$$\rho_{C^k}(x,y)=\sum_{l=0}^{k}\max_{t\in[a;b]}\left|x^{(l)}(t)-y^{(l)}(t)\right|.$$

При $k=0$ получаем метрику в пространстве непрерывных функций:

$$\rho_C(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|.$$

Такая метрика называется еще равномерной. Графическая реализация этой метрики изображена на рисунке 7. Грубо говоря, расстояние между непрерывными функциями определяется как наибольшее отклонение между их графиками.

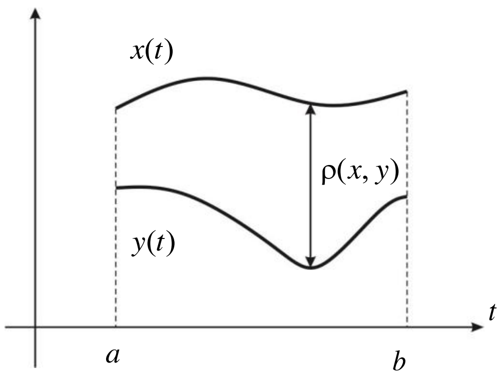

Рис. 7

Проверим выполнение аксиом I – III для равномерной метрики.

I. $\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|\ge 0$ – очевидно;

$\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|=0\Leftrightarrow x=y$ – проверяется устно;

II. $\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|=\max_{t\in[a;b]}|y(t)-x(t)|=\rho(y,x)$ – очевидно благодаря свойствам модуля;

III. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – вытекает из неравенства треугольника для модуля и свойства максимума:

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a;b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a;b]} |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \le$$

$$\le \max_{t\in[a;b]} \left(|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|\right) \le \max_{t\in[a;b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t\in[a;b]} |z(t) - y(t)| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Аксиомы метрики выполнены.

Исследуем, как в равномерной метрике выглядит шар радиуса r, центром которого является функция x:

$$B_r(x) = \left\{y \in C[a;b] : \max_{t\in[a;b]} |x(t) - y(t)| < r\right\} =$$

$$= \left\{y \in C[a;b]: \ x(t) - r < y(t) < x(t) + r \quad \forall t \in [a;b]\right\}.$$

Отсюда видно, что шар $B_r(x)$ представляет собой множество функций $y(t)$, графики которых лежат в полосе ширины $2r$, располагающейся вдоль графика функции $x(t)$ (рис. 8).

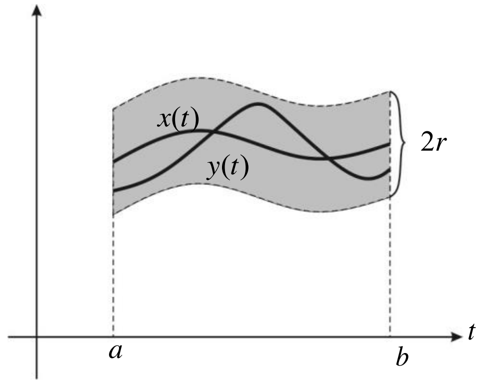

Рис. 8

6. Пространства Лебега $L^p(a;b)$.

Для конечного p расстояние вычисляется по формуле

$$\rho_{L^p}(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{L^1}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt,$$

$$\rho_{L^2}(x,y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt}.$$

Пространство $L^\infty(a;b)$ тоже метрическое, однако в данном курсе его метрика не используется.

Упражнение. Доказать, что функция $\rho(x,y) = \min_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$ не является метрикой в пространстве R^n, функция $\rho(x,y) = \inf_{1\le k<\infty} |x_k - y_k|$ не является метрикой в пространстве l^∞, функция $\rho(x,y) = \min_{t\in[a;b]} |x(t) - y(t)|$ не является метрикой в пространстве $C[a;b]$.

Упражнение. Доказать, что функция $\rho(x,y)=\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt$ не является метрикой в пространстве $L^2(a;b)$.

Таким образом, в этой части §2 собраны примеры стандартных метрических пространств. Большинство из них соответствует списку основных пространств §1. В некоторых примерах недостает проверки аксиом метрического пространства, эти пробелы можно восполнить самостоятельно или по учебнику [2]. Вычислению расстояний в основных метрических пространствах посвящены №9 – 12 в сборнике задач.

Разнообразие метрических пространств этим списком не исчерпывается. Назовем несколько других метрик, которые отличаются относительной простотой построения и наглядностью приложений. Например, в задачах транспортного планирования с радиальной схемой транспортных путей используется так называемая французская железнодорожная метрика. Для множества кривых на плоскости имеется метрика Хаусдорфа, которая в настоящее время используется в задачах компьютерного распознавания отсканированных текстов и изображений. В информатике разработано много специальных метрик, среди которых классические метрики Хэмминга и Левенштейна. Они выражают меру различия между цепочками символов. В частности, это необходимо для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google. Эти же метрики находят применение в микробиологии, для измерения расстояния между цепочками ДНК. Информацию об этих и других метриках можно найти в интернете, в частности, на сайте Википедия.

§ 3. Сходимость в метрическом пространстве

Одним из важнейших понятий в математике является понятие предельного перехода, необходимое для описания непрерывности и построения таких операций, как дифференцирование и интегрирование. Предельный переход важен также и в прикладном отношении: всякий вычислительный процесс должен сходиться к искомому результату. Наличие предельного перехода, иначе говоря, сходимости, для последовательности чисел, векторов, функций и т.д. связано с тем, что между указанными объектами можно измерять расстояние.

В данном конспекте лекций и в сборнике задач последовательности элементов будем обозначать по-разному: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$ или просто x_n для краткости. Кроме того, будут встречаться другие способы нумерации членов последовательности, обусловленные соображениями удобства в каждой конкретной ситуации.

В курсе математического анализа имеется понятие о сходящейся числовой последовательности, в том числе о числовой последовательности, сходящейся к нулю. На этой основе сформулируем определение сходящейся последовательности элементов в произвольном метрическом пространстве.

Определение 3.1

Пусть X – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$. Последовательность x_n *сходится* к элементу x, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Элемент x называется *пределом* последовательности x_n.

Обозначения: $x_n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Упражнение. Доказать, что последовательность может иметь только один предел.

Рассмотрим наиболее важные типы сходимости в функциональных пространствах.

1. Сходимость в пространстве $C[a;b]$:

$$x_n \to x \iff \rho_{C[a;b]}(x_n, x) = \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (3.1)$$

Такую сходимость называют *равномерной* сходимостью последовательности функций и противопоставляют *точечной* сходимости (сходимость в каждой отдельно взятой точке):

$$x_n(t) \to x(t), \quad t \in [a;b].$$

Точечная сходимость вытекает из равномерной, иными словами, является более слабым свойством, нежели равномерная сходимость.

Для иллюстрации равномерной сходимости рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ на промежутке $[0;1]$. На рисунке 9 изображены графики нескольких членов этой последовательности.

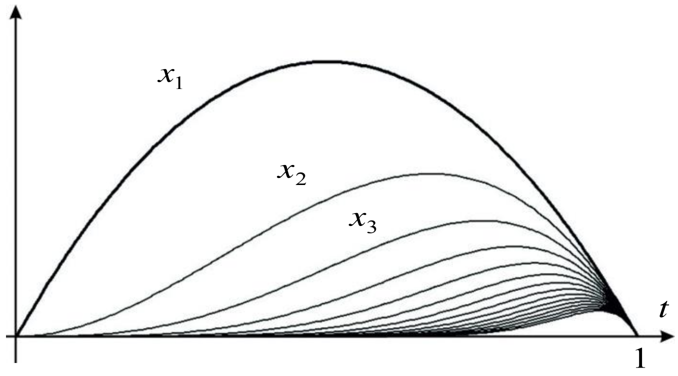

Рис. 9

Наблюдаем, что максимальное отклонение между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс стремится к нулю. Значит, последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится к нулевой функции $x(t)=0$ на отрезке $[0;1]$. Численная проверка по формуле (3.1) подтверждает этот факт.

2. Сходимость в пространстве $L^2(a;b)$:

$$x_n \to x \iff \rho_{L^2(a;b)}(x_n, x) = \sqrt{\int_a^b (x_n(t) - x(t))^2\,dt} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (3.2)$$

Такую сходимость называют *среднеквадратичной*. Эта сходимость более слабая, чем точечная и равномерная. При наличии только лишь среднеквадратичной сходимости нельзя быть уверенным в приближенным равенстве $x_n(t) \approx x(t)$ даже при больших значениях n. Поэтому в прикладных целях удобнее иметь дело с точечной сходимостью, еще лучше – с равномерной.

Для иллюстрации среднеквадратичной сходимости рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ на промежутке $[0;1]$. На рисунке 10 изображены графики нескольких членов этой последовательности.

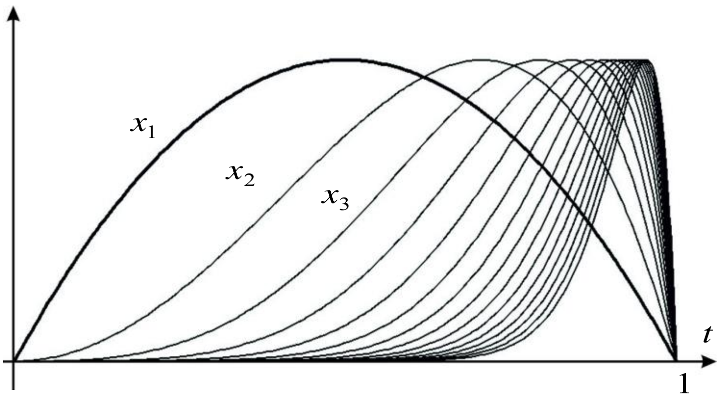

Рис. 10

Заметим, что максимальное отклонение между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс, графиком функции $x(t)=0$, одинаковое для всех n, не стремится к нулю. Поэтому для последовательности $x_n(t)$ нет равномерной сходимости к $x(t)=0$ на отрезке $[0;1]$. Среднеквадратичная сходимость правдоподобна, поскольку площадь фигуры, заключенной между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс сокращается. Численная проверка по формуле (3.2) подтверждает наличие среднеквадратичной сходимости.

Другие примеры исследования сходимости смотрите в сборнике задач, №13, 14.

На основе сходимости в метрическом пространстве определяют замкнутые множества и операцию замыкания.

Определение 3.2

Пусть X – метрическое пространство, $\Omega \subset X$. Множество Ω называется *замкнутым*, если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega,\ x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x \in \Omega.$$

Если множество Ω не замкнуто, то к нему можно добавить пределы всех его сходящихся последовательностей – и оно станет замкнутым. Этот процесс называется *замыканием* множества Ω, а его результат обозначается $\overline{\Omega}$.

Проиллюстрируем понятие замкнутого множества и замыкания на примерах:

1. Рассмотрим несколько множеств метрического пространства R.
   Множество $\Omega = (-2;0)$ не замкнутое, его замыкание $\overline{\Omega} = [-2;0]$.
   Множество рациональных чисел Q не замкнутое, пределом последовательности рациональных чисел может быть иррациональное число. Его замыкание $\overline{Q} = R$.
   Множество $\{x\}$, состоящее из одной точки x, замкнутое.
   Множество $\Omega = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ не замкнутое, поскольку все элементы этого множества образуют последовательность, чей предел не принадлежит Ω. Замыкание этого множества $\overline{\Omega} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$.

2. Рассмотрим в пространстве $L^2(-1;1)$ множество Ω, состоящее из всех непрерывных функций на отрезке $[-1;1]$. Множество Ω не замкнуто. Для подтверждения этого достаточно рассмотреть последовательность непрерывных функций

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < -1/n, \\ nt, & -1/n \le t < 1/n, \\ 1, & 1/n \le t \le 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

   Нетрудно проверить, что эта последовательность сходится, но ее предел не принадлежит Ω. Можно показать, что $\overline{\Omega} = L^2(-1;1)$.

Упражнение. Найти предел последовательности (3.3) в пространстве $L^2(-1;1)$.

Определение 3.3

Пусть X – метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Последовательность x_n называется *фундаментальной* в пространстве X, если $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Фундаментальную последовательность еще называют сходящейся в себе или последовательностью Коши.

Отметим связь между понятиями сходимости и фундаментальности:

- Сходящаяся последовательность является фундаментальной. Действительно, пусть $x_n \to x$, тогда из неравенства треугольника для метрики (см. §2, пункт 2.1) и определения сходимости следует, что $\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x) + \rho(x, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$, т.е. последовательность x_n фундаментальная.
- Фундаментальная последовательность не обязательно сходится. Это зависит от самой последовательности и от свойств пространства X.

Таким образом, в общем случае сходимость последовательности – это более сильное свойство, чем фундаментальность.

Определение 3.4
Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность из X сходится в этом пространстве.

Несмотря на столь абстрактное определение, полнота пространства важна в прикладном отношении. Она обеспечивает работу многих численных методов, сходимость вычислительного процесса к искомому результату.

Всякое неполное метрическое пространство X можно пополнить. Строгую формулировку теоремы о пополнении метрических пространств можно найти в учебниках [2], [3]. Операция пополнения метрического пространства аналогична операции замыкания для множества.

Большинство метрических пространств, перечисленных в §2, пункт 2.2, являются полными относительно указанных метрик: R, R^n, l^p, $C[a;b]$, $C^k[a;b]$, $L^p(a;b)$. Полнота пространств R, R^n и $C[a;b]$ известна из курса математического анализа: критерий Коши для сходящихся числовых и функциональных последовательностей (см. учебник [5]). Полнота пространств l^2, $L^1(a;b)$, $L^2(a;b)$ доказана в учебнике [2].

Упражнение. Выяснить, является ли полным пространство изолированных точек (№1 в списке метрических пространств, §2, пункт 2.2).

§ 4. Сжимающие операторы

Пусть X, Y – два множества с элементами произвольной природы. В математике есть несколько терминов, означающих отображение множества X в множество Y: функция, преобразование, морфизм, оператор и т.д.. Различия в их употреблении обусловлены традицией. В теории функционального анализа закрепился термин «оператор».

В данном пособии операторам посвящены два модуля, первый и третий. В первом модуле запись $\Phi: X \to Y$ означает, что оператор Φ определен для всех элементов $x \in X$ и каждому $x \in X$ сопоставляет единственное значение $y \in Y$. В частности, множества X и Y могут совпадать, т.е. возможна ситуация $\Phi: X \to X$. Значение оператора Φ на элементе x обозначаем символом $\Phi[x]$.

Числовые функции и вектор-функции, которые изучаются в курсе математического анализа, являются частным случаем операторов:

$\Phi: X \to R$, $X \subset R$ – числовая функция одной вещественной переменной, сопоставляет каждому числу $x \in X$ число $y \in R$;

$\Phi: X \to R$, $X \subset R^n$ – числовая функция нескольких вещественных переменных, сопоставляет каждому вектору $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ число $y \in R$;

$\Phi: X \to R^m$, $X \subset R^n$ – вектор-функция нескольких вещественных переменных, сопоставляет каждому вектору $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ вектор $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$.

Предметом исследования функционального анализа, как правило, являются операторы, действующие в функциональных множествах: каждой функции $x = x(t)$ из определенного множества X сопоставляется какая-то функция $y = y(t)$ из множества Y, например, $y = x^2(t)$, $y = x'(t)$, $y = \int_a^t x(s)ds$. Так, в первом модуле пособия, посвященном теории сжимающих операторов, для описания ее приложений задействованы как простейшие операторы (числовые функции и вектор-функции), так и операторы, действующие в пространстве непрерывных функций, т.е. $X = Y = C[a;b]$ и $\Phi: C[a;b] \to C[a;b]$ (см. §5). Более основательная типология операторов и разнообразные конкретные примеры представлены в третьем модуле пособия.

4.1. Принцип сжимающих операторов

Определение 4.1

Пусть X, Y – метрические пространства. Оператор $\Phi: X \to Y$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и любого элемента $x \in X$ верно следующее:

$$x_n \to x \text{ в пространстве } X \quad \Rightarrow \quad \Phi[x_n] \to \Phi[x] \text{ в пространстве } Y.$$

Определение 4.2

Пусть X – метрическое пространство. Оператор $\Phi: X \to X$ называется *сжимающим*, если существует такое число $0 \le \alpha < 1$, что $\rho(\Phi[x], \Phi[y]) \le \alpha\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Число α называется *коэффициентом сжатия*.

Иными словами, сжимающий оператор сокращает расстояние между точками. Заметим, что коэффициент сжатия α определен не единственным образом. В каждой конкретной ситуации целесообразно выбирать наименьший из возможных коэффициентов сжатия для данного оператора.

Из определений 4.1, 4.2 следует, что сжимающие операторы – это частный случай непрерывных операторов: поскольку для сжимающего оператора есть оценка $\rho(\Phi[x_n],\Phi[x]) \le \alpha\rho(x_n, x)$, то из $\rho(x_n, x) \to 0$ вытекает $\rho(\Phi[x_n],\Phi[x]) \to 0$.

Теорема 4.3 (Принцип сжимающих операторов. Теорема о неподвижной точке.)
Пусть X – полное метрическое пространство и оператор $\Phi: X \to X$ сжимающий. Тогда Φ имеет неподвижную точку, причем ровно одну. Иными словами, существует единственная точка $x \in X$, такая что $\Phi[x] = x$.

Доказательство

Сначала докажем существование неподвижной точки. Введем обозначение:

$$\Phi^n[x] = \underbrace{\Phi[\Phi[...\Phi[x]...]]}_{n \text{ раз}}.$$

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ путем многократного применения оператора Φ к элементу x_0:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi[x_0], \\ x_2 &= \Phi[x_1] = \Phi^2[x_0], \\ x_3 &= \Phi[x_2] = \Phi^3[x_0], \\ &... \\ x_n &= \Phi[x_{n-1}] = \Phi^n[x_0] \quad \text{и так далее.} \end{aligned}$$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментальная. Пусть α – коэффициент сжатия оператора Φ, положим $n < m$. Воспользуемся несколько раз определением 4.2 сжимающего оператора для получения следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) \;=\; \rho(\Phi^n[x_0],\Phi^m[x_0]) \;\le\; \alpha\rho(\Phi^{n-1}[x_0],\Phi^{m-1}[x_0]) \;\le\; \alpha^2\rho(\Phi^{n-2}[x_0],\Phi^{m-2}[x_0]) \;\le ... \\ ... \le\; \alpha^{n-1}\rho(\Phi[x_0],\Phi^{m-n+1}[x_0]) \;\le\; \alpha^n\rho(x_0,\Phi^{m-n}[x_0]). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Затем последовательно применяем неравенство треугольника для метрики ρ (см. §2, определение 2.1), обобщенное на несколько слагаемых, вновь определение сжимающего оператора и формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $0 \le \alpha < 1$:

$$\rho(x_0,\Phi^{m-n}[x_0]) \le \rho(x_0,\Phi[x_0]) + \rho(\Phi[x_0],\Phi^2[x_0]) + \rho(\Phi^2[x_0],\Phi^3[x_0]) + ... + \rho(\Phi^{m-n-1}[x_0],\Phi^{m-n}[x_0]) \le$$

$$\begin{aligned} \le \rho(x_0,\Phi[x_0]) + \alpha\rho(x_0,\Phi[x_0]) + \alpha^2\rho(x_0,\Phi[x_0]) + ... + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0,\Phi[x_0]) = \\ = (1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{m-n-1})\rho(x_0, x_1) < \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Объединяя оценки (4.1) и (4.2), получаем неравенство

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{4.3}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $0 \le \alpha < 1$. Тогда и $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Ввиду того, что пространство X полное по условию теоремы, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в нем:

$$\exists x \in X: \quad x_n \to x.$$

Покажем, что элемент x – это и есть неподвижная точка оператора Φ. Поскольку любой сжимающий оператор является непрерывным, то из сходимости $x_n \to x$ следует сходимость $\Phi[x_n] \to \Phi[x]$. По построению $\Phi[x_n] = x_{n+1}$, поэтому $\Phi[x_n] \to x$. Из единственности предела следует, что $\Phi[x] = x$.

Осталось доказать единственность неподвижной точки.

Допустим, что у сжимающего оператора Φ есть две неподвижные точки x и y. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(\Phi[x], \Phi[y]) \le \alpha\rho(x, y).$$

Поскольку $0 \le \alpha < 1$, то неравенство $\rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y)$ возможно только в случае $\rho(x, y) = 0$. По первой аксиоме метрики (см. определение 2.1) отсюда следует, что $x = y$.

Теорема доказана

4.2. Метод последовательных приближений, или простых итераций

Пусть X – полное метрическое пространство и оператор $\Phi: X \to X$ сжимающий с коэффициентом сжатия α. Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\Phi[x] = x. \tag{4.4}$$

Существование и единственность решения этого уравнения установлены в теореме 4.3, так как очевидно, что ему удовлетворяет неподвижная точка оператора Φ. Доказательство теоремы 4.3 дает и способ построения приближенного решения этого уравнения. Этот способ называется *методом последовательных приближений* или *методом простых итераций* и широко применяется в вычислительной математике.

Возьмем произвольное начальное приближение $x_0 \in X$. Применяя к x_0 оператор Φ, получаем последовательность

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi[x_0], \\ x_2 &= \Phi[x_1] = \Phi^2[x_0], \\ x_3 &= \Phi[x_2] = \Phi^3[x_0], \\ &\dots \\ x_n &= \Phi[x_{n-1}] = \Phi^n[x_0] \quad \text{и так далее.} \end{aligned}$$

Эту последовательность можно записать коротко с помощью рекуррентной формулы:

$$x_n = \Phi[x_{n-1}], \quad n = 1,2,3\ldots$$

Последовательность x_n сходится к точному решению x уравнения (4.4).

Каждый элемент x_n называется n-ой итерацией и является приближенным решением этого уравнения, причем степень точности увеличивается с ростом n. На рисунке 11 продемонстрированы построение и сходимость приближенных решений для простейшего случая: $X = R$, $\Phi[x] = f(x)$ – числовая функция одной вещественной переменной.

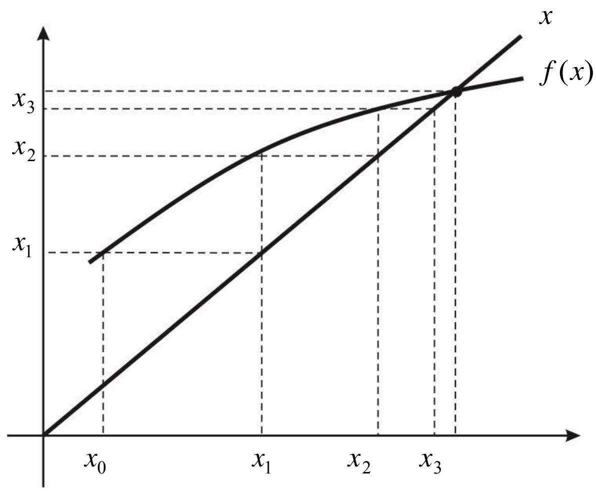

Рис. 11

Найти приближенное решение с точностью $\varepsilon > 0$ – значит довести этот итерационный процесс до такого x_n, что $\rho(x_n, x) \le \varepsilon$, где x – точное решение уравнения (4.4). Поскольку точное решение, как правило, неизвестно, то для организации итерационного процесса используют специальные оценки точности:

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1), \qquad \text{(априорная оценка)}$$

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}). \qquad \text{(апостериорная оценка)}$$

Априорная оценка следует из неравенства (4.3), если перейти в нем к пределу при $m \to \infty$.

Упражнение. Доказать справедливость апостериорной оценки.

С помощью *априорной* оценки (apriori – до опыта) можно заранее определить достаточное число итераций для нахождения приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Для этого нужно решить относительно n неравенство

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \ge \log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}.$$

Отсюда априорная оценка N_{apr} числа итераций находится по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}\right] + 1. \qquad (4.5)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа. Таким образом, априори известно, что для вычисления приближенного решения с требуемой точностью ε понадобится не более, чем N_{apr} итераций.

Апостериорную оценку (aposteriori – после опыта) удобно использовать в процессе вычисления итераций, если есть такая технологическая возможность. При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо сравнивать значения x_n и x_{n-1}:

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) \le \varepsilon$, то вычисления можно завершить,

если $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) > \varepsilon$, то – продолжить. (4.6)

Апостериорная оценка ближе к фактическому числу итераций, которое требуется для достижения заданной точности ε, и она всегда не превышает прогноз, полученный с помощью априорной оценки.

На опыте можно убедиться, что требуемое число итераций незначительно зависит от начального приближения x_0 и существенно зависит от коэффициента сжатия α. Чем меньше α, тем выше скорость сходимости метода простых итераций.