Н. В. Филимоненкова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

**Допущено НМС по математике в качестве учебного пособия
для студентов технических направлений бакалавриата и направлений
«Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика»
технических вузов**

Санкт-Петербург 2015

УДК 517.98

Рецензенты: д-р. физ.-мат. наук, профессор Б. Г. Вагер (СПбГАСУ); канд. физ.-мат. наук, доцент Ф. Л. Бахарев (СПбГУ).

Учебное пособие включает задания, принадлежащие трем традиционным модулям функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. Каждая задача представлена в 20 вариантах, все задачи снабжены образцами решений либо указаниями к решению. Сборник задач предназначен студентам технических вузов для практического освоения вводного курса в функциональный анализ. Изложение материала учитывает специфику подготовки студентов в техническом вузе и имеет прикладную ориентацию. Преобладают задания вычислительного характера. Часть задач предполагает численную реализацию решения в математических пакетах: решение уравнений разного типа методом простых итераций, аппроксимация функций различными ортогональными базисами, минимизация функционала методом Ритца, решение линейных операторных уравнений дифференциального и интегрального типа приближенными методами, в частности методом Галёркина. Данный сборник задач не является независимым изданием, рекомендуется использовать его в сочетании с конспектом лекций по функциональному анализу того же автора.

Табл. 0. Ил. 31. Библиогр: 0 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения функционального анализа являются в основном пространства функций и их отображения, откуда и происходит название дисциплины. Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики сложился в начале 20 века в результате обобщения конструкций математического анализа, линейной алгебры и геометрии. С тех пор его идеи и методы проникают во все области математики, физики и в прикладные науки на правах мощной обобщающей теории и удобного инструмента исследования конкретных задач.

Для студента технического вуза этот курс ставит две главные цели. Первая заключается в освоении языка функционального анализа, который широко используется в современном математическом моделировании. Вторая цель состоит в уяснении прикладной роли функционального анализа, которая сводится к аналитическому обоснованию эффективной работы численных методов.

Предлагаемый сборник задач является частью учебного комплекса, включающего также конспект лекций. Комплекс может быть использован в высшем профессиональном образовании для направлений подготовки 231300 «Прикладная математика», 230100 «Информатика и вычислительная техника», 010400 «Прикладная математика и информатика», 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», 010800 «Механика и математическое моделирование», 010900 «Прикладные математика и физика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Он предназначен для методического обеспечения вводного курса функционального анализа, рассчитанного на небольшое количество аудиторных часов (51 – 102) и средний уровень базовой математической подготовки студентов технических вузов.

В данном учебном комплексе проведена значительная адаптация классического курса функционального анализа к специфике профессиональной подготовки математика-инженера, математика-программиста. При разработке комплекса были поставлены и решены следующие задачи. Во-первых, адаптация материала к уровню подготовки и аналитических способностей студентов. Во-вторых, модернизация курса под использование электронных вычислительных средств (что отражено в первую очередь в сборнике задач). В-третьих, культивирование прикладной составляющей дисциплины, которое осуществляется за счет сочетания функционального анализа и вычислительной математики: реализована идея довести абстрактный теоретический факт до числа.

Наиболее оригинальной частью комплекса является предлагаемый сборник задач, опишем некоторые его особенности. Сборник включает 58 заданий, 20 вариантов условия в каждом, все задания снабжены образцами решения либо указаниями к решению. Большинство задач являются результатом авторской методической разработки. Представлены задания, принадлежащие трем традиционным модулям функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. Преобладают задания вычислительного характера, что соответствует прикладной ориентации курса. Ресурсы абстракции, по природе присущие функциональному анализу, использованы для взгляда сверху на вычислительные задачи с разнообразным конкретным содержанием. В этом заключается отличие данного пособия от большинства существующих задачников, где практикуется уход от конкретного содержания к абстрактным схемам и от вычислений к упражнениям на доказательство.

Все задачи можно разделить на два типа.

К первому типу относится большое количество задач, которые можно выполнить без привлечения электронных средств вычисления. Имеются как простейшие, одношаговые задачи, решение которых сводится к грамотному использованию формулы (например, вычисление нормы данной функции в данном пространстве), так и задания, предполагающие более сложный анализ (например, исследование сходимости конкретной последовательности в данном пространстве, оценка нормы линейного оператора или построение обратного оператора). Автор выражает благодарность профессорам Белорусского государственного университета, чей лабораторный практикум существенно использовался при разработке некоторых заданий этого типа (Антоневич А. Б., Функциональный анализ и интегральные уравнения: лабораторный практикум / А. Б. Антоневич, Е. И. Ваткина, М. Х. Мазель. [и др.]; под ред. А. Б. Антоневича, Я. В. Радыно. – Минск, 2003. – 179 с.).

Ко второму типу относятся задания, заведомо рассчитанные на численную реализацию в математических пакетах. Образцы решения выполнены в пакете Maple. Задачи такого типа предполагают как алгоритмизацию численного метода, так и обоснование его эффективной работы средствами функционального анализа: например, проверку условий сходимости, анализ факторов, влияющих на скорость сходимости. Несколько таких заданий завершают каждый из изучаемых модулей.

Так, в первом модуле, посвященном теории сжимающих операторов, имеется широкая подборка уравнений (см. §4), для которых следует применить принцип сжимающих операторов и в одном из математических пакетов найти приближенное решение методом простых итераций. Представлены числовые уравнения, системы линейных алгебраических уравнений, нелинейные функциональные уравнения общего вида, интегральные уравнения Фредгольма, задача Коши для линейного дифференциального уравнения, сводящаяся к интегральному уравнению Вольтерры. Особое внимание уделяется грамотному использованию априорной и апостериорной оценок числа итераций.

Второй модуль, посвященный теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве, завершается задачами на аппроксимацию функции частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической или по одной из полиномиальных систем (многочлены Лежандра, Чебышёва, Лаггера, Эрмита) с реализацией в одном из математических пакетов (см. §7). Представлены такие виды заданий: найти многочлен наилучшего приближения, аппроксимировать функцию частичной суммой ряда Фурье по указанной ортогональной системе, сравнить точность тригонометрической и полиномиальной аппроксимаций, сравнить качество аппроксимаций, выполненных при помощи ряда Фурье и ряда Тейлора, восстановить функцию по ее коэффициентам Фурье. Особое внимание уделено графической иллюстрации происходящего.

Третий модуль нацелен на практическое освоение теории линейных операторов и захватывает смежные вопросы оптимизации функционалов. Возможности инструментария, который предоставляет теория линейных операторов, продемонстрированы как на классических примерах (интегральном операторе Фредгольма и дифференциальном операторе Штурма – Лиувилля), так и на линейных операторах произвольного вида. В этом модуле имеются следующие типы расчетных заданий с реализацией в математических пакетах: решение уравнения в виде ряда Фурье по собственным функциям дифференциального или интегрального оператора (см. §9, задачи 46, 47), решение интегрального уравнения методом замены ядра на вырожденное (см. §10, задача 51), приближенная оптимизация функционала методом Ритца (см. §11, задача 55). Конечной точкой сюжетного развития выбраны такие методы приближенного решения линейных операторных уравнений, как метод наименьших квадратов и метод Галёркина (см. §12). На первый план выделены вопросы сходимости приближенных методов, проверка точности приближенного решения, графическая интерпретация. Особое внимание уделено переходу от частной формулировки задачи к постановке в абстрактной операторной форме и наоборот.

Задачи, представленные в сборнике, предполагают, что читатель владеет базовыми знаниями в области математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также элементарными навыками программирования в одном из математических пакетов.

Предлагаемый сборник задач не является независимым учебным изданием, рекомендуется его использовать в сочетании с конспектом лекций. Каждое задание сборника сопровождается указанием на определенные места в конспекте лекций, содержащие теоретическую справку.

Разработка учебного комплекса основана на опыте преподавания функционального анализа студентам специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ). Автор благодарен студентам СПбГАСУ Алине Шиминой и Станиславу Ткачеву за помощь в подготовке пособий, профессору МГУ Анатолию Григорьевичу Яголе и профессору СПбГУ Нине Михайловне Ивочкиной за ценные замечания и советы.

Модуль I. ТЕОРИЯ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Основные пространства

1. Построить график функции $x = x(t)$. По графику определить, принадлежит ли функция пространствам непрерывных функций $C[a;b]$, $C[c;d]$.

1. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{1-t^2},\ -1<t<1\\ 2,\ t=1\\ \ln t,\ t>1\\ t+1,\ t\le -1\end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

2. $x(t)=\begin{cases}t+\frac{\pi}{4},\ t\le -\frac{\pi}{4}\\ tg(t),\ -\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{4},\\ \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right),\ t>\frac{\pi}{4}\end{cases}$ $[a;b]=[0;\pi]$, $[c;d]=[-2;-1]$

3. $x(t)=\begin{cases}\cos\frac{\pi t}{2},\ |t|<1\\ |t-1|,\ |t|>1\end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

4. $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{t+2},\ t\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\\ \frac{1}{t-2},\ t\in[0;2)\cup(2;+\infty)\end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-1;1]$

5. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{9-t^2},\ 0<t\le 3\\ \sqrt{-t},\ t\le 0\\ \frac{1}{t-3},\ t>3\end{cases}$, $[a;b]=[1;3]$, $[c;d]=[-1;1]$

6. $x(t)=\begin{cases}|\sin t|,\ |t|\le\frac{\pi}{2}\\ 1,\ t>\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2t+\pi},\ t<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $[a;b]=[-\pi;\pi]$, $[c;d]=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

7. $x(t)=\begin{cases}e^{-t},\ t\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)\\ 1-2t,\ 0<t\le 1\\ \frac{1}{t-2},\ 1<t<2\end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[0;2]$

8. $x(t)=\begin{cases} arctg(t),\ t\le -1 \\ -t^2,\ -1<t<1 \\ t-2,\ t>1 \end{cases}$, $[a;b]=[-2;0]$, $[c;d]=[0;2]$

9. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{2}{t+3},\ t\in(-\infty;-3)\cup(-3;1) \\ \dfrac{1}{3-t},\ t\in[1;3)\cup(3;+\infty) \end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[0;4]$

10. $x(t)=\begin{cases} |\ln t|,\ t>0 \\ -t^2,\ -2<t\le 0 \\ -(t+4)^2,\ t<-2 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[-3;0]$

11. $x(t)=\begin{cases} \log_2(t+2),\ |t|<2 \\ 2\sin\dfrac{\pi t}{4},\ |t|\ge 2 \end{cases}$, $[a;b]=[-3;0]$, $[c;d]=[0;3]$

12. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{t},\ t<0 \\ 2t-1,\ 0\le t<3 \\ 10-\dfrac{t^2+1}{2},\ t>3 \end{cases}$, $[a;b]=[0;5]$, $[c;d]=[-1;1]$

13. $x(t)=\begin{cases} 1-2t,\ t<-2 \\ -t^3,\ -2\le t<0 \\ arctg(t),\ t>0 \end{cases}$, $[a;b]=[-4;-1]$, $[c;d]=[-1;1]$

14. $x(t)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(1-t),\ t<1 \\ 1-t,\ 1\le t\le 3 \\ t^2-11,\ t>3 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[1;6]$

15. $x(t)=\begin{cases} -\sqrt{1-t^2},\ |t|<1 \\ \ln t,\ t>1 \\ \dfrac{1}{t+1},\ t<-1 \end{cases}$, $[a;b]=[-10;0]$, $[c;d]=[0;10]$

16. $x(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{t^2},\ t\in(-1;0)\cup(0;1) \\ -1,\ t=0 \\ t^2-2t,\ t\ge 1 \\ -t^2,\ t\le -1 \end{cases}$, $[a;b]=[-3;3]$, $[c;d]=[0;2]$

17. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{|t|},\ |t|\le 1\\ 1,\ t<-1\\ \dfrac{1}{1-t},\ t>1\end{cases}$, $[a;b]=[-2;1]$, $[c;d]=[0;2]$

18. $x(t)=\begin{cases}-\sqrt{t},\ t>0\\ -1,\ t=0\\ t^2-2,\ -2\le t<0\\ \dfrac{1}{t+2},\ t<-2\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[-2;-1]$

19. $x(t)=\begin{cases}\sqrt{4-t^2},\ |t|\le 2\\ \dfrac{1}{t-4},\ t\in(2;4)\cup(4;+\infty)\\ -\dfrac{1}{t+4},\ t\in(-\infty;-4)\cup(-4;-2)\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[0;4]$

20. $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t^2},\ t\in(-1;0)\cup(0;1)\\ 0,\ t=0\\ |t|,\ t\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

Указание к решению

Для решения следует использовать определение пространства непрерывных функций $C[a;b]$, сформулированное в §1 конспекта лекций.

2. Определить аналитическим способом (без построения графика), принадлежит ли функция $x=x(t)$ пространствам непрерывных функций $C[a;b]$, $C[c;d]$.

1. $x(t)=\begin{cases}t\ln(t-t^2),\ t\in(0;1)\\ 0,\ t\notin(0;1)\end{cases}$, $[a;b]=\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$, $[c;d]=\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

2. $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos t}{\sin^2 t},\ t\ne\pi k,\ k\in Z\\ 1/2,\ t=\pi k,\ k\in Z\end{cases}$, $[a;b]=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $[c;d]=[0;2\pi]$

3. $x(t)=\begin{cases}arctg\dfrac{t}{1-t^2},\ |t|<1\\ \pi/2,\ |t|\ge 1\end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

4. $x(t)=\begin{cases} t\ln t,\ t>0 \\ 1,\ t=0 \\ \dfrac{arctg(t)}{t},\ t<0 \end{cases}$, $[a;b]=[-2;2]$, $[c;d]=[0;3]$

5. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{3t-|t|}{e^{2t}-1},\ t\neq 0 \\ 1,\ t=0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[0;1]$

6. $x(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}},\ |t|<1 \\ 0,\ |t|\geq 1 \end{cases}$, $[a;b]=[-1/2;1/2]$, $[c;d]=[-2;2]$

7. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t+1}{\sin t},\ t\neq \pi k,\ k\in Z \\ 0,\ t=\pi k,\ k\in Z \end{cases}$, $[a;b]=[-\pi;\pi]$, $[c;d]=\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

8. $x(t)=\begin{cases} \cos\left(e^{1/t}\right),\ t<0 \\ 1,\ t=0 \\ \dfrac{t}{e^t-\cos t},\ t>0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[0;3]$

9. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t-1}{\ln t},\ t\in(1;2] \\ 1,\ t\notin(1;2] \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[1;4]$

10. $x(t)=\begin{cases} \cos\pi t,\ t\leq -1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}},\ t\in(-1;1) \\ \sin\pi t,\ t\geq 1 \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

11. $x(t)=\begin{cases} \cos\left(e^{-\frac{1}{t}}\right),\ t\neq 0 \\ 1,\ t=0 \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-1;1]$

12. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{|t|+t}{\sqrt[3]{1+t}-1},\ t\neq 0 \\ 6,\ t=0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[0;1]$

13. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t}{t-\pi/2},\ t>\pi/2 \\ \sin(t-\pi),\ t\leq \pi/2 \end{cases}$, $[a;b]=[0;\pi/2]$, $[c;d]=[0;\pi]$

14. $x(t)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{t-1},\ t\neq 1 \\ \pi/2,\ t=1 \end{cases}$, $[a;b]=[1;4]$, $[c;d]=[0;2]$

15. $x(t)=\begin{cases} e^{-1/t},\ t>0 \\ 6,\ t=0 \\ \dfrac{t^3}{t-\sin t},\ t<0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;1]$, $[c;d]=[-2;0]$

16. $x(t)=\begin{cases} t\ln t,\ t>0 \\ 0,\ t=0 \\ \dfrac{t}{\ln(t^2+1)},\ t<0 \end{cases}$, $[a;b]=[0;1]$, $[c;d]=[-1;1]$

17. $x(t)=\begin{cases} t\ln(t^2-2t),\ t\notin[0;2] \\ \sin\pi t,\ t\in[0;2] \end{cases}$, $[a;b]=[1;3]$, $[c;d]=[-2;2]$

18. $x(t)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{t^2-1},\ t\notin[-1;1] \\ \arcsin t,\ t\in[-1;1] \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[-2;0]$

19. $x(t)=\begin{cases} \dfrac{t-|t|}{e^t-1},\ t\neq 0 \\ 2,\ t=0 \end{cases}$, $[a;b]=[-1;0]$, $[c;d]=[-2;2]$

20. $x(t)=\begin{cases} \sin\left(e^{\frac{1}{t-1}}\right),\ t\neq 1 \\ 0,\ t=1 \end{cases}$, $[a;b]=[0;2]$, $[c;d]=[0;1]$

Образец решения

$$x(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln t},\ t\in(0;1) \\ 0,\ t=0 \\ \dfrac{\sin t^2}{t},\ t\notin[0;1) \end{cases},\quad [a;b]=[-2;2],\quad [c;d]=[1;3]$$

Используем определение пространства непрерывных функций $C[a;b]$, сформулированное в §1 конспекта лекций:

$$x\in C[a;b] \quad\Leftrightarrow\quad x(t) \text{ определена в каждой точке отрезка } [a;b],$$
$$\lim_{t\to t_0} x(t)=x(t_0) \text{ для любой точки } t_0\in(a;b),$$
$$\lim_{t\to a+0} x(t)=x(a),\quad \lim_{t\to b-0} x(t)=x(b).$$

Заметим, что функция $x(t)$, предложенная условием задачи, определена во всех точках числовой прямой. К тому же это кусочно-заданная функция, причем две ее основные компоненты $\frac{1}{\ln t}$ и $\frac{\sin t^2}{t}$ непрерывны на своих промежутках задания. Поэтому $x(t)$ может иметь разрывы только в точках $t=0$, $t=1$.

Исследуем предельное поведение функции $x(t)$ в точке $t=0$:

$$\lim_{t\to 0-0} x(t) = \lim_{t\to 0-0} \frac{\sin t^2}{t} = 0;$$

$$\lim_{t\to 0+0} x(t) = \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{\ln t} = 0;$$

$$x(0) = 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0+0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0-0} x(t) = x(0)$, то функция $x(t)$ непрерывна в точке $t=0$.

Исследуем предельное поведение функции $x(t)$ в точке $t=1$:

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = \lim_{t\to 1-0} \frac{1}{\ln t} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to 1+0} x(t) = \lim_{t\to 1+0} \frac{\sin t^2}{t} = \sin 1;$$

$$x(1) = \sin 1.$$

Поскольку левосторонний предел бесконечный, то функция $x(t)$ имеет разрыв в точке $t=1$. Значит, $x \notin C[-2;2]$. Однако правосторонний предел в точке $t=1$ конечный и совпадает со значением функции в этой точке. Поэтому функция $x(t)$ непрерывна на отрезке $[1;3]$. Отсюда, $x \in C[1;3]$.

3. Определить, принадлежит ли функция $x = x(t)$ пространствам $C[-1;1]$, $C^1[-1;1]$, $C^2[-1;1]$.

1. $x(t) = \arccos\frac{t}{2}$
2. $x(t) = |t-3| + 1$
3. $x(t) = \begin{cases} e^{2t}, \; t<0 \\ 2t+1, \; t\ge 0 \end{cases}$
4. $x(t) = \begin{cases} t^2, \; t<0 \\ t, \; t\ge 0 \end{cases}$
5. $x(t) = \sqrt{1-t^2}$
6. $x(t) = \arcsin t$
7. $x(t) = |2t^2 - t|$
8. $x(t) = \ln(|t|+1)$
9. $x(t) = |t^2 - 4|$
10. $x(t) = \begin{cases} t, \; t<0 \\ \sin t, \; t\ge 0 \end{cases}$
11. $x(t) = \begin{cases} 1-t^2, \; t<0 \\ \cos t, \; t\ge 0 \end{cases}$
12. $x(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$
13. $x(t) = \begin{cases} \sin t, \; t<0 \\ arctg(t), \; t\ge 0 \end{cases}$
14. $x(t) = e^{|t|}$
15. $x(t) = |\cos t|$
16. $x(t) = \begin{cases} t^2, \; t<0 \\ t^3, \; t\ge 0 \end{cases}$
17. $x(t) = |tg(t)|$

18. $x(t)=\begin{cases}1+t,\ t<0\\ e^t,\ t\geq 0\end{cases}$

19. $x(t)=\left|t^3\right|$

20. $x(t)=2\left|\sin t\right|$

Образец решения

$$x(t)=\sqrt[3]{t}$$

Решение этой задачи опирается на определения пространств непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Проиллюстрируем рассуждения графически. На рисунке 1 изображен график функции $x(t)=\sqrt[3]{t}$. Функция непрерывна на всей числовой прямой и, в частности, на отрезке $[-1;1]$. Значит, $x\in C[-1;1]$.

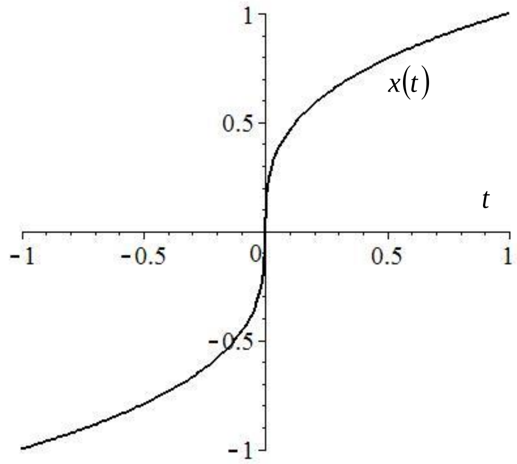

Рис. 1

На рисунке 2 представлен график производной $x'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$. Производная имеет разрыв в точке $t=0$, значит, функция x не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1;1]$. Отсюда $x\notin C^1[-1;1]$.

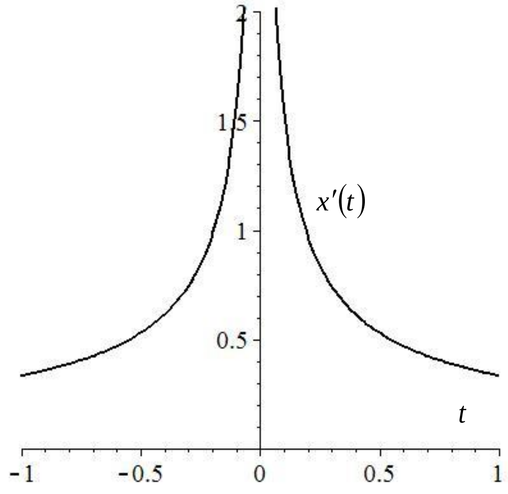

Рис. 2

Поскольку $C^2[-1;1]\subset C^1[-1;1]$, то $x\notin C^2[-1;1]$.

4. Проверить, принадлежит ли функция $x = x(t)$ пространству $L^1(a;b)$. На основании этого сделать вывод, может ли функция x принадлежать пространству $L^2(a;b)$.

1. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $(a;b) = (-1;1)$
2. $x(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$, $(a;b) = (0;1)$
3. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln t}$, $(a;b) = (1;2)$
4. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}$, $(a;b) = (1;2)$
5. $x(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt[3]{t^5}}$, $(a;b) = (0;1)$
6. $x(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$, $(a;b) = (0;1)$
7. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
8. $x(t) = \ln t$, $(a;b) = (0;1)$
9. $x(t) = \dfrac{1}{\sin t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t}}$, $(a;b) = (0;1)$
11. $x(t) = \dfrac{1}{t^2-1}$, $(a;b) = (0;1)$
12. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^3 t}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
13. $x(t) = tg(t)$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
14. $x(t) = \dfrac{t}{(t^2-1)^2}$, $(a;b) = (-1;1)$
15. $x(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$, $(a;b) = (1;e)$
16. $x(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $(a;b) = (0;1)$
17. $x(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$, $(a;b) = (1;e)$
18. $x(t) = ctg(t)$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
19. $x(t) = \dfrac{1}{t \cdot \sqrt[3]{\ln t}}$, $(a;b) = \left(0;\dfrac{1}{e}\right)$
20. $x(t) = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{e^t - 1}}$, $(a;b) = (0;\ln 2)$

Образец решения

$$x(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t+1}}, \quad (a;b) = (-1;1)$$

Решение этой задачи опирается на определение пространств Лебега, сформулированное в §1 конспекта лекций.

Проверим, принадлежит ли функция x пространству $L^1(-1;1)$:

$$\int_{-1}^{1} |x(t)| dt = \int_{-1}^{1} \frac{t+3}{\sqrt{t+1}} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1}\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{\sqrt{t+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}\Big|_{-1}^{1} + 4\sqrt{t+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{16\sqrt{2}}{3} < \infty.$$

Таким образом, $x \in L^1(-1;1)$, а поскольку $L^2(-1;1) \subset L^1(-1;1)$, то функция x может принадлежать пространству $L^2(-1;1)$.

5. Определить, каким из перечисленных пространств принадлежит функция $x = x(t)$: $C[0;1]$, $L^1(0;1)$, $L^2(0;1)$, $L^\infty(0;1)$, $L^1(1;+\infty)$, $L^2(1;+\infty)$, $L^\infty(1;+\infty)$.

1. a) $x(t)=\frac{t+2}{t}$ b) $x(t)=t$

2. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t^3}}$ b) $x(t)=t^2e^{-t}$

3. a) $x(t)=\sin t$ b) $x(t)=\frac{1}{(1-3t)^2}$

4. a) $x(t)=\frac{1}{t^3}$ b) $x(t)=\ln t$

5. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(2t-1)^2}}$ b) $x(t)=t^2$

6. a) $x(t)=e^{-t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$

7. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[5]{t^4}}$

8. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{|t-1|}}$ b) $x(t)=\sqrt{t}$

9. a) $x(t)=\frac{1}{t^2}$ b) $x(t)=(t+1)e^{-t}$

10. a) $x(t)=\frac{t+1}{t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

11. a) $x(t)=e^{t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}$

12. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$ b) $x(t)=\frac{1}{t+1}$

13. a) $x(t)=\frac{1}{(2t-1)^2}$ b) $x(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$

14. a) $x(t)=1$ b) $x(t)=\frac{1}{1-2t}$

15. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2}}$ b) $x(t)=\cos t$

16. a) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}$ b) $x(t)=e^{-2t}$

17. a) $x(t)=\frac{t}{e^t}$ b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$

18. a) $x(t)=\frac{1}{t-1}$ b) $x(t)=\ln(t+1)$

19. a) $x(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ b) $x(t)=\frac{1}{3t-1}$

20. a) $x(t)=\frac{1}{2+t}$ b) $x(t)=\frac{1}{(2t-1)^4}$

Образец решения

$$x(t)=\frac{1}{t}$$

Решение этой задачи опирается на определения соответствующих функциональных пространств, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Функция $x(t)$ не определена в точке $t=0$, поэтому $x\notin C[0;1]$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке $(0;1)$:

$$\int_0^1 |x(t)|dt=\int_0^1 \frac{dt}{t}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x\notin L^1(0;1).$$

Поскольку $L^1(0;1)\supset L^2(0;1)\supset L^\infty(0;1)$, то $x\notin L^2(0;1)$, $x\notin L^\infty(0;1)$.

Проверим принадлежность пространствам Лебега на промежутке $(1;+\infty)$:

$$\int_1^{+\infty} |x(t)|dt=\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x\notin L^1(1;+\infty);$$

$$\int_1^{+\infty} x^2(t)dt=\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}=1 \quad\Rightarrow\quad x\in L^2(1;+\infty).$$

При $t>1$ функция $x(t)$ ограничена: $|x(t)|<1$. Поэтому $x\in L^\infty(1:+\infty)$.

6. Привести пример функции $x=x(t)$, удовлетворяющей одновременно двум условиям (пояснить пример вычислениями).

1. $x\in L^1(-3;-1)$, $x\notin L^2(-3;-1)$
2. $x\in L^2(-\infty;0)$, $x\notin L^1(-\infty;0)$
3. $x\in L^3(-1;1)$, $x\notin L^3(-1;4)$
4. $x\in L^2(1;+\infty)$, $x\notin L^2(0;+\infty)$
5. $x\in L^3(2;4)$, $x\notin L^4(2;4)$
6. $x\notin L^2(0;1)$, $x\notin L^2(1;+\infty)$
7. $x\in L^3(0;+\infty)$, $x\notin L^2(0;+\infty)$
8. $x\in L^2(1;2)$, $x\notin L^3(1;2)$
9. $x\in L^1(-1;1)$, $x\notin L^1(1;+\infty)$
10. $x\in L^4(0;10)$, $x\notin L^1(0;+\infty)$
11. $x\notin L^1(1;2)$, $x\notin L^1(2;+\infty)$
12. $x\in L^2(0;1)$, $x\notin L^2(-1;1)$
13. $x\in L^1(1;+\infty)$, $x\notin L^1(0;+\infty)$
14. $x\notin L^1(-\infty;0)$, $x\in L^1(0;+\infty)$
15. $x\in L^2(0;1)$, $x\in L^2(1;+\infty)$
16. $x\notin L^1(0;+\infty)$, $x\in L^1(-\infty;0)$
17. $x\in L^3(-1;1)$, $x\notin L^3(1;+\infty)$
18. $x\in L^5(0;+\infty)$, $x\notin L^4(0;+\infty)$
19. $x\in L^2(-2;2)$, $x\notin L^3(-2;2)$
20. $x\in L^1(-1;1)$, $x\in L^1(0;+\infty)$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определение пространств Лебега, сформулированное в §1 конспекта лекций.

7. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность x **пространствам** l^1**,** l^2**,** l^3**,** l^4**,** l^∞**.**

1. a) $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{k+\sin^2 k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x=\left\{\cos\dfrac{\pi k}{4}\right\}_{k=1}^{\infty}$

2. a) $x=\left\{\dfrac{\ln k}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{6},\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{10},\ldots\right)$

3. a) $x=\left\{\sin\dfrac{3\pi}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x=\left(\dfrac{2}{1},\dfrac{4}{2},\dfrac{8}{6},\dfrac{16}{24},\dfrac{32}{120},\ldots\right)$

4. a) $x=\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{9},\dfrac{3}{16},\dfrac{4}{25},\ldots\right)$

   b) $x=\{arctg(k+1)\}_{k=1}^{\infty}$

5. a) $x=\left\{\dfrac{\sin k+\sqrt{k}}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x=\left\{\dfrac{k^2}{(k+1)!}\right\}_{k=1}^{\infty}$

6. a) $x=\left(-\dfrac{4}{1},\dfrac{16}{2},-\dfrac{64}{6},\dfrac{256}{24},-\dfrac{1024}{120},\ldots\right)$

   b) $x=\left\{\dfrac{(k+1)\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k(k^2+1)}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

7. a) $x=\left\{\sin\dfrac{\pi k}{6}\right\}_{k=1}^{\infty}$

   b) $x=\left\{\dfrac{k-1}{\sqrt[4]{k^5+k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

8. a) $x=\left(2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{24},\dfrac{6}{120},\ldots\right)$

   b) $x=\left\{\sin\dfrac{2\pi}{\sqrt[3]{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

9. a) $x=\left(1,\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{10},\dfrac{5}{17},\dfrac{6}{26},\ldots\right)$

   b) $x=\left\{\cos\dfrac{\pi}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

10. a) $x=\left\{\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

b) $x=\left(\frac{2}{1},\frac{5}{4},\frac{10}{9},\frac{17}{16},...\right)$

11. a) $x=\left\{\frac{arctgk}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\frac{2^k-1}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

12. a) $x=\left\{\sqrt[4]{\frac{4}{k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{15},\frac{1}{31},...\right)$

13. a) $x=\left(\ln\frac{2}{1},\ln\frac{3}{2},\ln\frac{4}{3},\ln\frac{5}{4},...\right)$

b) $x=\left\{\frac{k^3+1}{k!}\right\}_{k=1}^{\infty}$

14. a) $x=\left(-tg\frac{1}{2},tg\frac{1}{3},-tg\frac{1}{4},tg\frac{1}{5},...\right)$

b) $x=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},...\right)$

15. a) $x=\left\{2^{(-1)^k k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\frac{\sqrt{\ln k}}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

16. a) $x=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},...\right)$

b) $x=\left\{\frac{\ln k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

17. a) $x=\left\{\frac{e^k+e^{-k}}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left\{\sqrt[3]{\frac{k+1}{k^2+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

18. a) $x=\left\{\cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

b) $x=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{6}{8},\frac{24}{16},\frac{120}{32},...\right)$

19. a) $x=\left(\frac{5}{1},\frac{25}{2},\frac{125}{6},\frac{625}{24},\frac{3125}{120},...\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{k+1}{k\sqrt{k+2}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

20. a) $x=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{6}{8},\dfrac{7}{10},\dots\right)$

b) $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{k\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения пространств суммируемых и ограниченных числовых последовательностей, сформулированные в §1 конспекта лекций.

Образец №1 решения

$$x=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Просуммируем члены последовательности, получаем расходящийся гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty \quad\Rightarrow\quad x\notin l^1.$$

Просуммируем члены последовательности с квадратами, получаем сходящийся ряд из обратных квадратов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty \quad\Rightarrow\quad x\in l^2.$$

Поскольку $l^2\subset l^3\subset l^4\subset l^{\infty}$, то $x\in l^3,l^4,l^{\infty}$.

Образец №2 решения

$$x=(1,2,3,4,\dots,99,0,0,0,\dots)$$

Отметим сразу, что последовательность x ограничена:

$$|x_k|\le 99,\quad k=1,2,3\dots \quad\Rightarrow\quad x\in l^{\infty}.$$

Последовательность x содержит лишь конечное число ненулевых членов, поэтому при любом натуральном показателе p имеем сумму конечного числа слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p=\sum_{k=1}^{99}k^p<\infty \quad\Rightarrow\quad x\in l^p.$$

Таким образом, последовательность x принадлежит всем указанным в задаче пространствам.

Образец №3 решения

$$x=\left(\frac{2}{1},-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{5}{4},\dots\right)$$

Определим общий член последовательности:

$$x_n=(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n},\quad n=1,2,3,\dots$$

Просуммируем члены последовательности с произвольным показателем p:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=\infty.$$

Ряд расходится, потому что не выполнен необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=1\neq 0.$$

Однако последовательность x ограничена:

$$|x_n|\le 2,\quad n=1,2,3,...$$

Таким образом, $x\notin l^1,l^2,l^3,l^4$, но $x\in l^{\infty}$.

8. Указать наименьшее целое число p, при котором бесконечная числовая последовательность x принадлежит пространству l^p.

1. $x=\left\{\ln\dfrac{k+\sqrt{k}}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$
2. $x=\left\{1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[8]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
3. $x=\left\{\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+2\sqrt{k}}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
4. $x=\left\{\dfrac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right\}_{k=2}^{\infty}$
5. $x=\left(\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{2}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{3}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{4}},\sin\dfrac{\pi}{\sqrt[4]{5}},...\right)$
6. $x=\left\{\dfrac{\ln k}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
7. $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[6]{k}}-\dfrac{1}{\sqrt[6]{k}+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$
8. $x=\left\{\dfrac{\sqrt[3]{k}-1}{\sqrt{k}+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$
9. $x=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[4]{k+\sin^2 k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$
10. $x=\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{2\cdot 3}},\sqrt[4]{\dfrac{2}{3\cdot 4}},\sqrt[4]{\dfrac{3}{4\cdot 5}},\sqrt[4]{\dfrac{4}{5\cdot 6}},...\right)$
11. $x=\left(0,\dfrac{\ln 2}{2},\dfrac{\ln 3}{3},\dfrac{\ln 4}{4},...\right)$
12. $x=\left\{\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

13. $x = \left\{ \sqrt[3]{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

14. $x = \left\{ \frac{arctg(k)}{\sqrt[4]{k-1}} \right\}_{k=2}^{\infty}$

15. $x = \left\{ k\sqrt{k} \sin \frac{1}{k^2} \right\}_{k=1}^{\infty}$

16. $x = \left\{ \frac{\sqrt[4]{k} + \sqrt[6]{k}}{\sqrt[3]{k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

17. $x = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{4} - \sqrt{3}, \ldots\right)$

18. $x = \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt[3]{5}}, \ldots \right)$

19. $x = \left(\ln\frac{3}{1}, \ln\frac{4}{2}, \ln\frac{5}{3}, \ln\frac{6}{4}, \ldots \right)$

20. $x = \left\{ \sqrt[5]{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

Образец решения

$$x = \left\{ \frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Решение этой задачи опирается на определение пространств суммируемых числовых последовательностей l^p, сформулированное в §1 конспекта лекций. Прежде всего заметим, что данная последовательность знакоположительная, поэтому в рассуждениях опускаем знак модуля:

$$x \in l^p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty.$$

Сходимость знакоположительного ряда устойчива относительно замены общего члена ряда на эквивалентное выражение:

$$x_k^p = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{k^2+1}} \right)^p \sim \frac{1}{k^{2p/5}} \text{ при } k \to \infty.$$

Используем условие сходимости обобщенного гармонического ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p/5}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2p}{5} > 1.$$

Значит, $x \in l^p$ при любом $p > \frac{5}{2}$. Таким образом, $p = 3$ – это наименьшее целое число p, при котором последовательность x принадлежит пространству l^p.

§ 2. Метрические пространства

9. Найти расстояния между числовыми векторами x и y в пространстве R^n с тремя разными метриками ρ_1, ρ_2, ρ_∞. В какой метрике расстояние наибольшее, в какой наименьшее?

1. $n=3$, $x=\left(\frac{\pi}{2},0,-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\left(-\frac{\pi}{3},\pi,\pi\right)$
2. $n=5$, $x=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{2},0,2\right)$, $y=\left(0,0,2,-\frac{2}{3},2\right)$
3. $n=4$, $x=(3,-2,\pi,1)$, $y=(5,-1,2\pi,0)$
4. $n=5$, $x=(3,3,-1,0,2)$, $y=(0,5,4,-5,-2)$
5. $n=3$, $x=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{5},\frac{3}{10}\right)$, $y=\left(-3,-2,-\frac{4}{5}\right)$
6. $n=6$, $x=(-1,-1,3,4,2,1)$, $y=(2,-1,0,0,1,2)$
7. $n=4$, $x=\left(-\sqrt{2},\sqrt{3},0,0\right)$, $y=\left(-2,1,\sqrt{2},0\right)$
8. $n=3$, $x=\left(\sqrt{10},\sqrt{2},2\right)$, $y=\left(\sqrt{2},0,-\sqrt{8}\right)$
9. $n=6$, $x=(1,-1,2,0,0,1)$, $y=(-2,1,1,0,2,3)$
10. $n=3$, $x=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{5},\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $y=\left(-1,\frac{2}{5},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
11. $n=7$, $x=(1,3,-1,5,0,1,1)$, $y=(2,3,1,0,4,2,1)$
12. $n=6$, $x=(1,-1,2,0,0,1)$, $y=(-2,1,1,0,2,3)$
13. $n=4$, $x=(1,-1,2,1)$, $y=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2},0,\frac{1}{2}\right)$
14. $n=3$, $x=\left(-1,\frac{\sqrt{5}}{4},1\right)$, $y=\left(-2,\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
15. $n=4$, $x=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $y=\left(0,\sqrt{2},0,\sqrt{3}\right)$
16. $n=3$, $x=\left(\frac{3\pi}{2},2\pi,\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},-2\pi\right)$
17. $n=7$, $x=(0,0,7,5,1,-3,0)$, $y=(1,2,1,-3,1,-5,-1)$
18. $n=5$, $x=\left(\frac{3}{2},3,-1,\frac{1}{2},0\right)$, $y=\left(\frac{1}{2},-1,4,\frac{5}{2},1\right)$
19. $n=3$, $x=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},1,0\right)$, $y=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},1\right)$
20. $n=6$, $x=(0,0,0,2,2,2)$, $y=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},-1,-1,-1\right)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулы для вычисления расстояний ρ_1, ρ_2, ρ_∞, которые приведены в конспекте лекций, §2, пункт 2.2.

10. Найти расстояние между функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ в указанном пространстве.

1. a) $x(t) = 3$, $y(t) = \sqrt[3]{2(t+2)^2(4-t)}$, $C[-4;2]$

   b) $x(t) = \ln t$, $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $L^2(0;1)$

2. a) $x(t) = t + 8$, $y(t) = 4\sqrt{t+2}$, $C[-2;7]$

   b) $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{3 - t^2}$, $L^2(-1;1)$

3. a) $x(t) = (t^2 - 2t)\ln t$, $y(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - 4t$, $C\left[\dfrac{1}{2};3\right]$

   b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \dfrac{1}{\sin t}$, $L^2\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$

4. a) $x(t) = \dfrac{16}{t-1}$, $y(t) = 15 + 2t - t^2$, $C[2;4]$

   b) $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $y(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $L^2\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

5. a) $x(t) = \dfrac{t}{2}$, $y(t) = \sin t \cos t$, $C\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

   b) $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$, $L^2(0;\pi)$

6. a) $x(t) = \dfrac{8}{t} + 8$, $y(t) = \dfrac{t^2}{2}$, $C[-3;-1]$

   b) $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = \cos 2t$, $L^2\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

7. a) $x(t) = \dfrac{1}{2}(t^2 + 1)arctg(t)$, $y(t) = \dfrac{\pi}{8}t^2 + \dfrac{t-1}{2}$, $C[-1;1]$

   b) $x(t) = \sqrt{1 + t^2}$, $y(t) = t$, $L^2(-1;1)$

8. a) $x(t) = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin t$, $y(t) = \dfrac{\pi}{12}t^2 - \dfrac{1}{4}t\sqrt{1 - t^2}$, $C[-1;1]$

   b) $x(t) = t$, $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$, $L^2(0;1)$

9. a) $x(t) = 8t$, $y(t) = 15 - \dfrac{4}{t^2}$, $C\left[\dfrac{2}{3};2\right]$

   b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $L^2(-\pi;\pi)$

10. a) $x(t) = t^5 + 5t^3$, $y(t) = 5t^4 - 1$, $C[-1;2]$

    b) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$, $L^2(0;1)$

11. a) $x(t)=2t^2+5$, $y(t)=t^4$, $C\left[0;\frac{3}{2}\right]$

b) $x(t)=\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$, $y(t)=\sqrt{t}$, $L^2(1;e)$

12. a) $x(t)=t$, $y(t)=e^t$, $C[-1;1]$

b) $x(t)=t$, $y(t)=\ln t$, $L^2(0;1)$

13. a) $x(t)=\sin 2t$, $y(t)=t$, $C\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) $x(t)=\sin t$, $y(t)=\sin 2t$, $L^2(0;\pi)$

14. a) $x(t)=t$, $y(t)=\ln(t^2+1)$, $C[-1;3]$

b) $x(t)=te^t$, $y(t)=e^{-t}$, $L^2(-1;0)$

15. a) $x(t)=\frac{6t}{t^2+3}$, $y(t)=\frac{6}{t^2+3}$, $C[-4;2]$

b) $x(t)=t$, $y(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $L^2(0;1)$

16. a) $x(t)=\frac{8}{t-2}+2t+5$, $y(t)=\frac{t^2}{2}$, $C\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

b) $x(t)=\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$, $y(t)=\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$, $L^2(2;4)$

17. a) $x(t)=3-t$, $y(t)=\frac{4}{(t+2)^2}$, $C[-1;2]$

b) $x(t)=\ln t$, $y(t)=2$, $L^2(0;1)$

18. a) $x(t)=2\sin t$, $y(t)=\cos 2t$, $C[0;\pi]$

b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, $y(t)=t$, $L^2(-1;1)$

19. a) $x(t)=9-\frac{16}{t+2}$, $y(t)=t^2+4t-2$, $C[-1;1]$

b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}$, $y(t)=\frac{t}{2}$, $L^2(0;1)$

20. a) $x(t)=tg^2 t$, $y(t)=2tgt,$ $C\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

b) $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=2e^{1-t}$, $L^2(0;1)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулы для вычисления расстояний в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$ и в пространстве квадратично суммируемых функций $L^2(a;b)$, которые приведены в конспекте лекций, §2, пункт 2.2.

Образец решения для задания а)

$$x(t)=t, \quad y(t)=2\cos t, \quad C[0;2\pi]$$

Вычислим расстояние между функциями x и y в пространстве $C[0;2\pi]$:

$$\rho_{C[0;2\pi]}(x,y) \;=\; \max_{t\in[0;2\pi]}|x(t)-y(t)| \;=\; \max_{t\in[0;2\pi]}|t-2\cos t|.$$

Найдем наибольшее абсолютное значение функции $\varphi(t)=t-2\cos t$ на отрезке $[0;2\pi]$. Как известно, наибольшее значение непрерывной функции следует искать среди ее значений на концах отрезка и локальных экстремумов внутри отрезка. Вычисляем $\varphi'(t)=1+2\sin t$. Из условия $\varphi'(t)=0,\ t\in[0;2\pi]$, находим точки, в которых могут быть локальные экстремумы:

$$t_1=\frac{7\pi}{6},\ t_2=\frac{11\pi}{6}.$$

Сравним абсолютные значения функции φ в точках t_1, t_2 и на концах отрезка:

$$|\varphi(t_1)|=\frac{7\pi}{6}+\sqrt{3}\approx 5.4;$$

$$|\varphi(t_2)|=\frac{11\pi}{6}-\sqrt{3}\approx 4;$$

$$|\varphi(0)|=2;$$

$$|\varphi(2\pi)|=2\pi-2\approx 4.3.$$

Выбираем среди этих значений наибольшее и получаем расстояние между функциями x и y в пространстве $C[0;2\pi]$:

$$\rho_{C[0;2\pi]}(x,y)=\frac{7\pi}{6}+\sqrt{3}\approx 5.4.$$

11. Найти расстояние между бесконечными числовыми последовательностями x и y в пространстве l^1.

1. $x=\left(\frac{3}{1!},\frac{3^2}{2!},\frac{3^3}{3!},\frac{3^4}{4!},\ldots\right), \quad y=\left(\frac{1}{1!},\frac{3}{2!},\frac{3^2}{3!},\frac{3^3}{4!},\ldots\right)$
2. $x=\left(\frac{\ln 1}{1},\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 4}{4},\ldots\right), \quad y=\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 4}{4},\frac{\ln 5}{5},\ldots\right)$
3. $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots\right), \quad y=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{24},\frac{1}{48},\ldots\right)$
4. $x=\left(\frac{2}{1},\frac{4}{2},\frac{8}{6},\frac{16}{24},\frac{32}{120},\ldots\right), \quad y=\left(\frac{4}{1},\frac{8}{2},\frac{16}{6},\frac{32}{24},\frac{64}{120},\ldots\right)$

5. $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},...\right)$, $y=\left(1,1,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\frac{1}{64},...\right)$

6. $x=\left(\frac{\ln 2}{1},\frac{\ln^2 2}{2},\frac{\ln^3 2}{6},\frac{\ln^4 2}{24},...\right)$, $y=\left(\frac{\ln 2}{3},\frac{\ln^2 2}{6},\frac{\ln^3 2}{18},\frac{\ln^4 2}{72},...\right)$

7. $x=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{9},\frac{2}{27},-\frac{4}{81},\frac{2}{243},...\right)$, $y=\left(0,\frac{1}{9},0,\frac{1}{81},0,...\right)$

8. $x=\left(\frac{2}{1!},\frac{2^2}{2!},\frac{2^3}{3!},\frac{2^4}{4!},...\right)$, $y=\left(\frac{1}{1!},\frac{2}{2!},\frac{2^2}{3!},\frac{2^3}{4!},...\right)$

9. $x=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{8},0,\frac{1}{32},0,...\right)$, $y=\left(0,-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{9},0,-\frac{1}{27},...\right)$

10. $x=\left(\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},...\right)$, $y=\left(\frac{1}{2!},\frac{2}{3!},\frac{3}{4!},\frac{4}{5!},\frac{5}{6!},...\right)$

11. $x=\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},...\right)$, $y=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{48},\frac{1}{240},...\right)$

12. $x=\left(1,\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},\frac{16}{81},\frac{32}{243},...\right)$, $y=\left(\frac{2}{1},0,\frac{8}{9},0,\frac{32}{81},0,...\right)$

13. $x=\left(\frac{\ln 2}{1!},\frac{\ln^2 2}{2!},\frac{\ln^3 2}{3!},\frac{\ln^4 2}{4!},...\right)$, $y=\left(\frac{\ln 2}{2\cdot 1!},\frac{\ln^2 2}{2\cdot 2!},\frac{\ln^3 2}{2\cdot 3!},\frac{\ln^4 2}{2\cdot 4!},...\right)$

14. $x=\left(3,\frac{3}{2^1},\frac{3}{2^2},\frac{3}{2^3},\frac{3}{2^4},\frac{3}{2^5},\frac{3}{2^6},...\right)$, $y=\left(1,0,\frac{1}{2^2},0,\frac{1}{2^4},0,\frac{1}{2^6},...\right)$

15. $x=\left(\frac{2^3}{2^2},\frac{3^3}{2^3},\frac{4^3}{2^4},\frac{5^3}{2^5},...\right)$, $y=\left(\frac{1^3}{2^1},\frac{2^3}{2^2},\frac{3^3}{2^3},\frac{4^3}{2^4},...\right)$

16. $x=\left(\frac{\ln^2 1}{1},\frac{\ln^2 2}{4},\frac{\ln^2 3}{9},\frac{\ln^2 4}{16},...\right)$, $y=\left(\frac{\ln^2 2}{4},\frac{\ln^2 3}{9},\frac{\ln^2 4}{16},\frac{\ln^2 5}{25},...\right)$

17. $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},...\right)$, $y=\left(1,0,\frac{1}{4},0.\frac{1}{16},0,\frac{1}{64},...\right)$

18. $x=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\frac{1}{720},...\right)$, $y=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{60},\frac{1}{360},...\right)$

19. $x=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},...\right)$, $y=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{27},\frac{1}{27},\frac{1}{243},\frac{1}{243},...\right)$

20. $x=\left(\frac{1^2}{2^1},\frac{2^2}{2^2},\frac{3^2}{2^3},\frac{4^2}{2^4},\frac{5^2}{2^5},...\right)$, $y=\left(0,\frac{1^2}{2^1},\frac{2^2}{2^2},\frac{3^2}{2^3},\frac{4^2}{2^4},...\right)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулу для вычисления расстояния в пространстве суммируемых числовых последовательностей l^1, которая приведена в конспекте лекций, §2, пункт 2.2. Вычисление расстояния между последовательностями x и y в пространстве l^1 сводится к вычислению суммы числового ряда. Сумма числового ряда может быть найдена непосредственно по определению (как предел последовательности частичных сумм) либо с использованием известных формул. В данной задаче может понадобиться формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии и стандартные разложения функций (например, экспоненты) в ряд Тейлора.

12. Даны функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Определить, принадлежит ли функция y шару $B_r(x)$ в указанном пространстве.

1. a) $x(t) = t$, $y(t) = e^t$, $r = 2$, $C[-1;1]$

   b) $x(t) = \sin 2t$, $y(t) = \cos 2t$, $r = 1$, $L^2\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

2. a) $x(t) = tg^2 t$, $y(t) = 2tgt$, $r = 2$, $C\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

   b) $x(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$, $y(t) = \sqrt{t}$, $r = 2$, $L^2(1; e)$

3. a) $x(t) = \frac{t}{t+1}$, $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $r = \frac{2}{3}$, $C[0;4]$

   b) $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $r = 4$, $L^2(-1;1)$

4. a) $x(t) = t^3 + 6t$, $y(t) = 3t^2 + 2$, $r = 10$, $C[-1;1]$

   b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $y(t) = t$, $r = 1$, $L^2(0;1)$

5. a) $x(t) = \frac{8}{t-2} + 2t + 5$, $y(t) = \frac{t^2}{2}$, $r = 2$, $C\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

   b) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $r = 1$, $L^2(0; \pi)$

6. a) $x(t) = 2\sqrt{t-1}$, $y(t) = 2 - t$, $r = 10$, $C[1;5]$

   b) $x(t) = te^t$, $y(t) = e^{-t}$, $r = 2$, $L^2(-1;0)$

7. a) $x(t) = (t^2 - 2t)\ln t$, $y(t) = \frac{3}{2}t^2 - 4t$, $r = 2$, $C\left[\frac{1}{2};3\right]$

   b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $y(t) = \ln t$, $r = 2$, $L^2(0;1)$

8. a) $x(t) = 3 - t$, $y(t) = \frac{4}{(t+2)^2}$, $r = 4$, $C[-1;2]$

   b) $x(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$, $y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$, $r = 1$, $L^2(2;4)$

9. a) $x(t) = 2\sin t$, $y(t) = \cos 2t$, $r = \frac{5}{2}$, $C[0; \pi]$

b) $x(t)=\ln t$, $y(t)=t$, $r=2$, $L^2(0;1)$

10. a) $x(t)=\frac{16}{t-1}$, $y(t)=15+2t-t^2$, $r=5$, $C[2;4]$
    b) $x(t)=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$, $y(t)=t$, $r=1$, $L^2(-1;1)$

11. a) $x(t)=\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)arctg(t)$, $y(t)=\frac{\pi}{8}t^2+\frac{t-1}{2}$, $r=1$, $C[-1;1]$
    b) $x(t)=\frac{t}{2}$, $y(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}$, $r=2$, $L^2(0;1)$

12. a) $x(t)=\sqrt[3]{2(t-2)^2(8-t)}$, $y(t)=1$, $r=4$, $C[0;6]$
    b) $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=2e^{1-t}$, $r=3$, $L^2(0;1)$

13. a) $x(t)=2t^3+7$, $y(t)=6t^2+18t$, $r=50$, $C[-2;4]$
    b) $x(t)=\ln t$, $y(t)=2$, $r=3$, $L^2(0;1)$

14. a) $x(t)=\frac{8}{t}+8$, $y(t)=\frac{t^2}{2}$, $r=1$, $C[-3;-1]$
    b) $x(t)=\sqrt{1+t^2}$, $y(t)=t$, $r=2$, $L^2(-1;1)$

15. a) $x(t)=9-\frac{16}{t+2}$, $y(t)=t^2+4t-2$, $r=2$, $C[-1;1]$
    b) $x(t)=t$, $y(t)=\cos t$, $r=4$, $L^2(0;\pi)$

16. a) $x(t)=8t$, $y(t)=15-\frac{4}{t^2}$, $r=4$, $C\left[\frac{1}{2};2\right]$
    b) $x(t)=t$, $y(t)=\sqrt{3-t^2}$, $r=3$, $L^2(-1;1)$

17. a) $x(t)=\frac{t}{2}$, $y(t)=\sin t\cos t$, $r=1$, $C\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
    b) $x(t)=\sin t$, $y(t)=\frac{1}{\sin t}$, $r=1$, $L^2\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$

18. a) $x(t)=t^5+5t^3$, $y(t)=5t^4-1$, $r=8$, $C[-1;2]$
    b) $x(t)=\sin t$, $y(t)=\cos t$, $r=4$, $L^2(-\pi;\pi)$

19. a) $x(t)=2t+5$, $y(t)=t^4$, $r=10$, $C[0;2]$
    b) $x(t)=e^t$, $y(t)=e^{-t}$, $r=2$, $L^2(0;1)$

20. a) $x(t)=t+8$, $y(t)=4\sqrt{t+2}$, $r=5$, $C[-2;7]$
    b) $x(t)=\frac{1}{1-t}$, $y(t)=\frac{1}{1+t}$, $r=1$, $L^2\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на сведения, которые предоставляет §2 конспекта лекций: определение шара в метрическом пространстве, формулы для вычисления расстояния в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$ и в пространстве квадратично суммируемых функций $L^2(a;b)$.

§ 3. Сходимость в метрическом пространстве

13. Выписать несколько членов последовательности $x^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Установить, является ли последовательность $x^{(n)}$ фундаментальной и сходящейся в указанном пространстве.

1. a) l^3, $\quad x^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+\sqrt{2}}{4}, \frac{n+\sqrt{3}}{9}, \frac{n+\sqrt{4}}{16}, \ldots\right)$

2. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^2, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2(n+2)}, \frac{1}{3(n+3)}, \frac{1}{4(n+4)}, \ldots\right)$

3. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^4, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+\sqrt{2}}{2n}, \frac{n+\sqrt{3}}{3n}, \frac{n+\sqrt{4}}{4n}, \ldots\right)$

4. a) l^∞, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n+1}, \frac{n+3}{n+2}, \frac{n+4}{n+3}, \ldots\right)$

   b) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+1)^3}, \frac{1}{(n+1)^4}, \ldots\right)$

5. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^n n!}, \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}, \frac{1}{2^{n+2}(n+2)!}, \ldots\right)$

   b) l^5, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

6. a) l^1, $x^{(n)} = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^4, $x^{(n)} = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{\sqrt{2}n-1}{2n}, \frac{\sqrt{3}n-1}{3n}, \frac{\sqrt{4}n-1}{4n}, \ldots \right)$

7. a) l^1, $x^{(n)} = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^2, $x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{9}, \frac{n+4}{16}, \ldots \right)$

8. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^4, $x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots \right)$

9. a) l^1, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n^\lambda}, \frac{2}{n^\lambda}, \frac{3}{n^\lambda}, \ldots, \frac{n}{n^\lambda}, 0, 0, \ldots \right)$, $\lambda > 2$

b) l^∞, $x^{(n)} = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}, \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}, \ldots \right)$

10. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}, \ldots \right)$

b) l^∞, $x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

11. a) l^2, $x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+2^2}{2^3}, \frac{n+3^2}{3^3}, \frac{n+4^2}{4^3}, \ldots \right)$

b) l^3, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+2}}, \frac{1}{\sqrt{n+3}}, \ldots \right)$

12. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^6, $x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

13. a) l^3, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+3}}, \ldots \right)$

b) l^{∞}, $\quad x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},0,0,\ldots\right)$

14. a) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{2}{n^4},\frac{4}{n^4},\frac{6}{n^4},\ldots,\frac{2n}{n^4},0,0,\ldots\right)$

b) l^{∞}, $\quad x^{(n)}=(n,n-1,n-2,\ldots,2,1,0,0,\ldots)$

15. a) l^{2}, $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n},0,0,0,\ldots\right)$

b) l^{4}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{\sqrt{2}(n+2)},\frac{1}{\sqrt{3}(n+3)},\frac{1}{\sqrt{4}(n+4)},\ldots\right)$

16. a) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{2^n}{n!},\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\frac{2^{n+2}}{(n+2)!},\frac{2^{n+3}}{(n+3)!},\ldots\right)$

b) l^{2}, $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{2,2,2,\ldots,2}_{n},0,0,\ldots\right)$

17. a) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{1}{n^3},\frac{3}{n^3},\frac{5}{n^3},\ldots,\frac{2n-1}{n^3},0,0,\ldots\right)$

b) l^{2}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{n-1}{n},\frac{2n-1}{4n},\frac{3n-1}{9n},\frac{4n-1}{16n},\ldots\right)$

18. a) l^{2}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{1}{3^{n+1}},\frac{1}{3^{n+2}},\frac{1}{3^{n+3}},\ldots\right)$

b) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$

19. a) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{\sqrt{n}+1}{1},\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{n}+\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{n}+\sqrt{4}}{16},\ldots\right)$

b) l^{4}, $\quad x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ldots,\frac{1}{\sqrt[3]{n}},0,0,\ldots\right)$

20. a) l^{∞}, $\quad x^{(n)}=\left(\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n+2},\frac{n+2}{n+3},\frac{n+3}{n+4},\ldots\right)$

b) l^{1}, $\quad x^{(n)}=\left(1,\frac{1}{n},\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^3},\frac{1}{n^4},\ldots\right)$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения сходящейся последовательности и фундаментальной последовательности в метрическом пространстве (конспект лекций, §3) и на формулы для вычисления расстояний в пространствах l^p (конспект лекций, §2). Заметим, что здесь n-ый член последовательности обозначен символом $x^{(n)}$, а не x_n, как обычно. Причина такой модификации в том, что в данной задаче n-ый член последовательности сам является бесконечной числовой последовательностью с координатами $x_k^{(n)}$.

Образец №1 решения

$$l^3, \quad x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{\ln(n+1)}, \frac{1}{\ln^2(n+1)}, \frac{1}{\ln^3(n+1)}, \frac{1}{\ln^4(n+1)}, \ldots\right).$$

Пусть $x^{(n)} = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. По условию $x_k^{(n)} = \dfrac{1}{\ln^k(n+1)}$.

Выпишем несколько членов последовательности $x^{(n)}$ при $n = 1,2,3,4$:

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln^2 2}, \frac{1}{\ln^3 2}, \frac{1}{\ln^4 2}, \ldots\right),$$

$$x^{(2)} = \left(1, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln^2 3}, \frac{1}{\ln^3 3}, \frac{1}{\ln^4 3}, \ldots\right),$$

$$x^{(3)} = \left(1, \frac{1}{\ln 4}, \frac{1}{\ln^2 4}, \frac{1}{\ln^3 4}, \frac{1}{\ln^4 4}, \ldots\right),$$

$$x^{(4)} = \left(1, \frac{1}{\ln 5}, \frac{1}{\ln^2 5}, \frac{1}{\ln^3 5}, \frac{1}{\ln^4 5}, \ldots\right).$$

Легко видеть, что при $n \to \infty$

$$x_0^{(n)} \to 1,$$

$$x_k^{(n)} \to 0, \quad k > 1.$$

<u>Гипотеза</u>: $x^{(n)} \to x$ в пространстве l^3, где $x = (1,0,0,0,0,\ldots)$. Заметим, что последовательность x также принадлежит пространству l^3, иначе гипотеза не имела бы смысла.

Проверим гипотезу по определению сходимости в пространстве l^3:

$$\rho_{l^3}\left(x^{(n)}, x\right) = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^3} = \sqrt[3]{|1-1|^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\ln^k(n+1)} - 0\right|^3} = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln^3(n+1)}\right)^k} =$$

(используем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии)

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 1/\ln^3(n+1)} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{\ln^3(n+1) - 1}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, доказано, что $x^{(n)}$ – сходящаяся последовательность, а именно: $x^{(n)} \to x$ в пространстве l^3, где $x = (1,0,0,0,0,\ldots)$. Отсюда следует и фундаментальность последовательности $x^{(n)}$.

Образец №2 решения

$$l^\infty, \qquad x^{(n)} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{1}, \frac{\sqrt{n+2}}{2}, \frac{\sqrt{n+3}}{3}, \frac{\sqrt{n+4}}{4}, \ldots \right).$$

Пусть $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots \right)$. По условию $x_k^{(n)} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{k}$.

Выпишем первые несколько членов последовательности $x^{(n)}$ при $n = 1,2,3,4$:

$$x^{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \ldots \right),$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \ldots \right),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{\sqrt{4}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{4}, \ldots \right),$$

$$x^{(4)} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{8}}{4}, \ldots \right).$$

Отсюда видно, что каждая из координат $x_k^{(n)}$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Действительно, для каждого фиксированного k имеем $x_k^{(n)} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{k} \to \infty$ при $n \to \infty$.

<u>Гипотеза</u>: последовательность $x^{(n)}$ не имеет предела в пространстве l^∞.

Чтобы окончательно доказать, что последовательность $x^{(n)}$ не обладает сходимостью в пространстве l^∞, покажем, что она даже не является фундаментальной в этом пространстве:

$$\rho_{l^\infty}\left(x^{(n)}, x^{(m)} \right) = \sup_{1 \le k < \infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right| = \sup_{1 \le k < \infty} \left| \frac{\sqrt{n+k}}{k} - \frac{\sqrt{m+k}}{k} \right| = \sup_{1 \le k < \infty} \frac{\left| \sqrt{n+k} - \sqrt{m+k} \right|}{k} =$$

$$= \sup_{1 \le k < \infty} \frac{|n-m|}{k\left(\sqrt{n+k} + \sqrt{m+k} \right)} = \frac{|n-m|}{\sqrt{n+1} + \sqrt{m+1}}.$$

Нельзя утверждать, что $\dfrac{|n-m|}{\sqrt{n+1}+\sqrt{m+1}} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Действительно, выражение $\dfrac{|n-m|}{\sqrt{n+1}+\sqrt{m+1}}$ представляет из себя неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty - \infty}{\infty} \right]$ и может иметь разный предел при разном соотношении между числами n и m. Например, если взять $n = 2m$, то

$$\frac{|n-m|}{\sqrt{n+1}+\sqrt{m+1}} = \frac{m}{\sqrt{2m+1}+\sqrt{m+1}} \to \infty \text{ при } m, n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $x^{(n)}$ не фундаментальная в пространстве l^∞ и тем более не является сходящейся в этом пространстве.

14. Для функциональной последовательности $x_n(t)$ и функции $x(t)$ проверить наличие равномерной и среднеквадратичной сходимости $x_n \to x$ на промежутке $[a;b]$. Проиллюстрировать выводы графически (для построения графиков можно использовать математические пакеты).

1. a) $x_n(t)=\dfrac{nt}{\exp(nt^2)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};\,2\right]$.

b) $x_n(t)=t^n-t^{2n}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

2. a) $x_n(t)=\sqrt[n+1]{t}-\sqrt[n]{t}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

b) $x_n(t)=\sin(n^2t)\exp(-nt)$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;\pi]$.

3. a) $x_n(t)=\dfrac{tn\sqrt{n}}{e^{nt}}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;2]$.

b) $x_n(t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{n}{1-t^2}\right), |t|<1\\ 0,\ |t|\ge 1\end{cases}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-2;2]$.

4. a) $x_n(t)=\dfrac{2nt}{1+n^2t^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;2]$.

b) $x_n(t)=\sqrt{t^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $x(t)=|t|$, $[a;b]=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

5. a) $x_n(t)=\dfrac{nt}{n+t}$, $x(t)=t$, $[a;b]=\left[-\dfrac{1}{2};\,2\right]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{(n+1)^2t^2}{n\exp(nt^2)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-3;3]$.

6. a) $x_n(t)=\sqrt[n]{t}-\sqrt[n]{t^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

b) $x_n(t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{n}{1-n^2t^2}\right), |t|<\dfrac{1}{n}\\ 0,\ |t|\ge \dfrac{1}{n}\end{cases}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-1;1]$.

7. a) $x_n(t)=(t-1)^n$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

b) $x_n(t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{n^2}{n-t^2}\right), t^2<n\\ 0,\ t^2\ge n\end{cases}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-2;2]$.

8. a) $x_n(t)=t^{2n}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-1;1]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{nt}{\exp(n^2t)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;2]$.

9. a) $x_n(t)=\dfrac{\cos nt}{n}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-\pi;\pi]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{nt\sqrt{t}}{\exp(2nt^2)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;2]$.

10. a) $x_n(t) = \dfrac{t}{e^{nt}}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;4]$.

b) $x_n(t) = \sqrt[3]{t^3 + \dfrac{1}{n}}$, $x(t) = t$, $[a;b] = C[0;2]$.

11. a) $x_n(t) = t^n$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{tn^2}{\exp(tn)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = \left[\dfrac{1}{2};\, 3\right]$.

12. a) $x_n(t) = \dfrac{n(1-t^2)^n}{2n-1}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-1;1]$.

b) $x_n(t) = (nt)^2 \exp(-n^2 t)$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;3]$.

13. a) $x_n(t) = \dfrac{t\sqrt{n}}{1+nt^2}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-3;3]$.

b) $x_n(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{n}{1-nt^2}\right), t^2 < \dfrac{1}{n} \\ 0,\ t^2 \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-1;1]$.

14. a) $x_n(t) = \dfrac{nt\sqrt{t}}{\exp(nt^2)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;3]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{nt(1+nt)}{1+n^2t^2}$, $x(t) = 1$, $[a;b] = \left[\dfrac{1}{2};\, 4\right]$.

15. a) $x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-2\pi;2\pi]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{(n+1)^2 t}{n \cdot \exp(nt)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;3]$.

16. a) $x_n(t) = \dfrac{n^2 t}{e^{nt}}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;4]$.

b) $x_n(t) = (3t)^n (1-t)^n$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

17. a) $x_n(t) = \sin(nt)\exp(-nt)$, $x(t) = 0$, $[a;b] = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $x_n(t) = \exp\left(-\dfrac{t^2}{n}\right)$, $x(t) = 1$, $[a;b] = [-1;1]$.

18. a) $x_n(t) = \dfrac{t\sqrt{n}}{\exp(nt^2)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = \left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{2nt}{1+n^2t^2}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-3;\, 3]$.

19. a) $x_n(t)=\dfrac{t}{2+nt^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-2;2]$.

b) $x_n(t)=\sqrt[2n]{t}-\sqrt[n]{t}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

20. a) $x_n(t)=\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2t^2}}$, $x(t)=\dfrac{1}{t}$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{nt^2}{e^{nt}}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;3]$.

Образец решения

$$x_n(t)=t^n-t^{n+1},\quad x(t)=0,\quad [a;b]=[0;1].$$

Как указано в §3 конспекта лекций, под равномерной сходимостью понимают сходимость в пространстве $C[a;b]$. Среднеквадратичной сходимостью называют сходимость в пространстве $L^2(a;b)$. Причем равномерная сходимость – более сильное свойство, чем среднеквадратичная, иными словами, при наличии равномерной сходимости имеется и среднеквадратичная:

$$x_n\to x \text{ в } C[a;b] \quad\Rightarrow\quad x_n\to x \text{ в } L^2(a;b).$$

Если равномерной сходимости нет, то может быть более слабая – среднеквадратичная.

Для данных задачи проверим сначала, имеется ли равномерная сходимость. Вычислим расстояние между функциями $x_n(t)$ и $x(t)\equiv 0$ в пространстве $C[0;1]$:

$$\rho_{C[0;1]}(x_n,0) \;=\; \max_{t\in[0;1]}|x_n(t)-0| \;=\; \max_{t\in[0;1]}\left(t^n-t^{n+1}\right).$$

Найдем наибольшее значение функции $\varphi(t)=t^n-t^{n+1}$ на отрезке $[0;1]$. Как известно, наибольшее значение непрерывной функции следует искать среди ее значений на концах отрезка и локальных экстремумов внутри отрезка. Вычисляем $\varphi'(t)=nt^{n-1}-(n+1)t^n$. Из условия $\varphi'(t)=0$, $t\in[0;1]$, находим точку, в которой может быть локальный экстремум:

$$t_0=1-\frac{1}{n+1}.$$

Сравним значения функции φ в точке t_0 и на концах отрезка:

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0,$$

$$\varphi(t_0)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Очевидно, $\varphi(t_0)$ – наибольшее значение функции φ на отрезке $[0;1]$.

Возвращаемся к вычислению расстояния между функциями $x_n(t)$ и $x(t)\equiv 0$.

$$\rho_{C[0;1]}(x_n,0) \;=\; \max_{t\in[0;1]}\left(t^n-t^{n+1}\right) \;=\; \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=$$

$$=\;\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right) \;=\; \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=\; 0\cdot e^{-1}=0.$

Таким образом, доказано, что $x_n\to x$ в пространстве $C[0;1]$.

Этот факт можно проиллюстрировать графически. Построим на отрезке $[0;1]$ графики некоторых членов последовательности x_n и график нулевой функции, совпадающий с осью абсцисс.

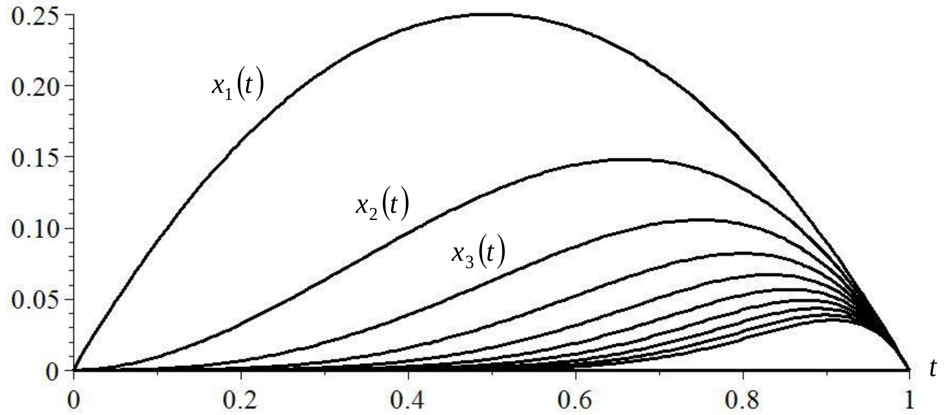

Рис. 3

Как видно на рисунке 3, расстояние $\rho_{C[0;1]}(x_n,0)$ действительно реализуется в точке локального максимума функции x_n и это расстояние последовательно сокращается при $n\to\infty$.

Из наличия равномерной сходимости автоматически вытекает наличие среднеквадратичной сходимости.

§ 4. Сжимающие операторы и метод простых итераций

15. Дано числовое уравнение, т.е. уравнение в одной вещественной неизвестной.

A. Преобразовать уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

B. Методом простых итераций найти приближенное решение с точностью 10^{-5}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $x\sqrt{3}+arctg(3x-2)=\sin^2 x$
2. $5x+\cos^2 3x+\sqrt{1+x^2}+7=0$
3. $x\sqrt{5}+\sin x=\sqrt{\pi}+\sqrt{3}\cos x$
4. $2x+\dfrac{x}{1+x^2}=4+arcctg(x)$
5. $x\sqrt{2}+\ln(1+x^2)+arctg(4x)+4=0$
6. $\dfrac{5}{2}x+\sqrt{3}\sin x=6+\cos x$
7. $\pi x+arctg(\pi x)+\ln(1+x^2)+8=0$
8. $2x+\cos x+\dfrac{2x}{1+x^2}=0$
9. $x-\dfrac{1}{3}\cos(2x+1)+\dfrac{2x}{2+x^2}=5$
10. $x\sqrt{5}+\sqrt{1+x^2}+4=\sin^2 x$
11. $\dfrac{9}{4}x+\sqrt{3}\sin x+arctg(x)=2\pi+\cos x$
12. $x+arctg(x)+\dfrac{x}{1+x^2}=3$
13. $\dfrac{8}{3}x-\sqrt{3}\cos x-\sin x+arctg(\pi x)=3\pi$

14. $x+\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{1+x^2}=5$

15. $\frac{2\pi}{3}x+\sqrt{3}\cos x+\sin x+arctg(x)=0$

16. $2x+\sin x+arctg(x)+\frac{x}{1+x^2}=6$

17. $3x+\ln(1+x^2)+\sin x+\cos x=7$

18. $x+arctg(2x+1)=4+\frac{1}{3}\cos^2 x$

19. $\frac{\pi x}{2}+\ln(1+x^2)=2\pi+arcctg(\pi x)$

20. $3x+\sin x+\sqrt{1+x^2}=0$

Образец решения

$$2x-\cos x+\sin x+arctg(x)=2. \qquad (1)$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

A. Преобразуем уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.1. Обозначим $\varphi(x)=2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2$. Уравнение (1) имеет вид $\varphi(x)=0$. Вычисляем $\varphi'(x)=2+\sin x+\cos x+\frac{1}{1+x^2}$. Поскольку

$$-\sqrt{2}\ \le\ \sin x+\cos x\ \le\ \sqrt{2},\qquad 0\ <\ \frac{1}{1+x^2}\ \le\ 1,$$

то получаем оценку

$$0\ <\ \nu\ \le\ \varphi'(x)\ \le\ \mu,$$
$$\nu=2-\sqrt{2},\quad \mu=3+\sqrt{2}.$$

Преобразуем уравнение $\varphi(x)=0$ к виду $x-\frac{1}{\mu}\varphi(x)=x$:

$$x-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2\right)=x. \qquad (2)$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi: R\to R,\quad \Phi[x]=x-\frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x-\cos x+\sin x+arctg(x)-2\right).$$

Уравнение (2) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ. Оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия

$$\alpha=1-\frac{\nu}{\mu}=1-\frac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Итак, к уравнению (1), записанному в форме (2), применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать метод простых итераций для поиска приближенного решения.

B. Используя метод простых итераций, найдем приближенное решение уравнения (2) с точностью $\varepsilon=10^{-5}$. *Процесс вычислений организуем с помощью априорной и апостериорной оценок числа итераций.*

Схема действия метода простых итераций, использование априорной и апостериорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{3+\sqrt{2}}\left(2x_{n-1} - \cos x_{n-1} + \sin x_{n-1} + arctg(x_{n-1}) - 2\right). \tag{3}$$

Выберем произвольным образом начальное приближение, например $x_0 = -6$, и вычисляем первую итерацию $x_1 = -2.355772$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}\right] + 1.$$

В данном случае

$$\varepsilon = 10^{-5}, \quad \alpha = 1 - \frac{\nu}{\mu} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}},$$

$$\rho_R(x_0, x_1) = |x_0 - x_1| = 3.644228.$$

Отсюда $N_{apr} = 105$. Следовательно, для вычисления приближенного решения с требуемой точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ понадобится не более, чем 105 итераций.

Процесс непосредственного вычисления итераций по формуле (3) удобно проводить в одном из математических пакетов с использованием оператора цикла. Цикл должен быть организован с помощью апостериорной оценки. На каждом шаге цикла следует сравнивать значения текущей итерации x_n и предыдущей x_{n-1}:

если $\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon,$ то вычисления продолжаются;

если $\frac{\alpha}{1-\alpha}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon,$ то вычисления завершаются.

При этом последняя вычисленная итерация x_n является приближенным решением уравнения (2) с заданной точностью ε. В данном случае понадобилось всего 9 итераций, и получено приближенное решение

$$x_9 = 0.726981.$$

Как видно, априорная оценка числа итераций сильно завышена.

Все численные результаты приведены с округлением до 6 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью.

16. Дана система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.

A. Преобразовать систему к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

B. Методом простых итераций найти приближенные решения с точностью 10^{-2} и с точностью 10^{-4}, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.

C. Найти точное решение системы и сравнить с приближенными.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 62 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 102 \\ -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -47 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -122 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 60 \\ 9x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 13 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 35 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 45 \\ 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 94 \\ 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 27 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 39 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 12x_4 = 36 \\ 4x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 110 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 12x_4 = 100 \\ -32x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 = -392 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_2 - 15x_4 = -83 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 22 \\ 2x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 4x_4 = 50 \\ -2x_1 + x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 165 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -19 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -9 \\ -2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = -17 \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 66 \\ 2x_2 - 6x_3 + x_4 = -63 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 146 \\ 2x_1 - 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 80 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 84 \\ 3x_1 + 8x_2 - 9x_4 = 5 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 65 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 35 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_4 = 39 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 70 \\ 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 20 \\ 15x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 645 \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -210 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1 + x_4 = 12 \\ 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -43 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 42 \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} -8x_1+7x_2+2x_3+x_4=79 \\ 9x_1+2x_2-15x_3=-27 \\ 4x_1+3x_3-14x_4=303 \\ 3x_1+9x_2-3x_3-6x_4=246 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} -3x_1+3x_2+2x_3+x_4=32 \\ 3x_1+2x_2-5x_3-x_4=19 \\ -9x_1-2x_2-x_3+6x_4=-105 \\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=20 \end{cases}$

Образец решения

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+7x_3+x_4=-70 \\ 3x_1-x_2+5x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+3x_3+9x_4=59 \\ 12x_1+5x_2+6x_3+x_4=-276 \end{cases}$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.
Запишем систему в матричной форме

$$\mathrm{A}x=b, \tag{1}$$

где

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 12 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} -70 \\ -2 \\ 59 \\ -276 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det(\mathrm{A})=-2765\neq 0,$ то система (1) имеет единственное решение.

А. Преобразуем систему (1) к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.2. Все численные результаты приведены с округлением до 5 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью.
Вычисляем $\lambda\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)=260.27179$ – максимальное собственное число матрицы $\mathrm{A}^T\mathrm{A}$.
Обозначим символом I единичную матрицу:

$$\mathrm{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем систему (1) к виду

$$\underbrace{\left(\mathrm{I}-\frac{\mathrm{A}^T\mathrm{A}}{\lambda\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)}\right)}_{C}x+\underbrace{\frac{\mathrm{A}^Tb}{\lambda\left(\mathrm{A}^T\mathrm{A}\right)}}_{d}=x \quad \Leftrightarrow \quad Cx+d=x. \tag{2}$$

Рассмотрим пространство R^4 с евклидовой метрикой ρ_2 (см. конспект лекций, §2) и оператор

$$\Phi: R^4\to R^4, \ \Phi[x]=Cx+d.$$

Уравнение (2) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ.
Вычисляем $\lambda(C)=0.97507$ – максимальное собственное число матрицы C. Оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha=\lambda(C)$. К системе (1), записанной в форме

(2), применим принцип сжимающих операторов. Методом простых итераций можно найти ее приближенное решение с любой заранее заданной точностью.

B. Методом простых итераций найдем приближенные решения системы (2) с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ *и* $\varepsilon = 10^{-4}$*, используя априорную и апостериорную оценки числа итераций.*

Схема действия метода простых итераций, использование априорной и апостериорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$:

$$x_n = Cx_{n-1} + d. \tag{3}$$

Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_2(x_0, x_1)}\right] + 1.$$

Процесс непосредственного вычисления итераций по формуле (3) необходимо проводить в одном из математических пакетов с использованием оператора цикла. Цикл должен быть организован с помощью апостериорной оценки. На каждом шаге цикла следует сравнивать значения текущей итерации x_n и предыдущей x_{n-1}:

$$\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho_2(x_n, x_{n-1}) > \varepsilon, \text{ то вычисления продолжаются;}$$

$$\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho_2(x_n, x_{n-1}) \le \varepsilon, \text{ то вычисления завершаются.}$$

При этом последняя вычисленная итерация x_n является приближенным решением уравнения (2) с заданной точностью ε.

В данном случае получились следующие результаты. Взяли произвольным образом начальное приближение

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon = 10^{-2}$ априорная оценка числа итераций $N_{apr} = 444$. Фактически же понадобилось 274 итерации и получили приближенное решение

$$x_{274} = \begin{bmatrix} -21.99468 \\ 0.99329 \\ -5.00516 \\ 12.99990 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

При $\varepsilon = 10^{-4}$ априорная оценка числа итераций $N_{apr} = 626$. Фактически же понадобилось 457 итераций и получено приближенное решение

$$x_{457} = \begin{bmatrix} -21.99995 \\ 0.99993 \\ -5.00005 \\ 13.00000 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

C. Найдем точное решение системы (1) и сравним его с приближенными.

Точное решение системы (1) можно найти методом Крамера, методом Гаусса или с помощью обратной матрицы:

$$x = \begin{bmatrix} -22 \\ 1 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Сравним точное решение с приближенными (4), (5) в евклидовой метрике ρ_2 пространства R^4:

$$\rho_2(x_{274}, x) = 0.00999 < 10^{-2}, \quad \rho_2(x_{457}, x) = 0.00009 < 10^{-5}.$$

Таким образом, точность приближенных решений (4) и (5) соответствует поставленной задаче.

17. Доказать двумя способами, что оператор $\Phi : C[a;b] \to C[a;b]$ является сжимающим:

A. по определению сжимающего оператора;

B. по достаточному признаку сжимающего оператора.

1. $\Phi[x] = (t+1)\cos\dfrac{x(t)}{5} + \sin\dfrac{t}{2}, \quad [a;b] = [0;\pi]$
2. $\Phi[x] = t\sqrt{1 + x^2(t)} - t^2 + t + 1, \quad [a;b] = \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$
3. $\Phi[x] = t^2\cos\dfrac{x(t)}{4\pi} - \dfrac{t}{\pi}, \quad [a;b] = [-\pi;\pi]$
4. $\Phi[x] = \sqrt[4]{1 + |x(t)|} - \sqrt{t+1}, \quad [a;b] = [-1;1]$
5. $\Phi[x] = \dfrac{t^2}{2|x(t)| + 1} - arctg(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$
6. $\Phi[x] = \sqrt[3]{1 + 2x(t)} - t, \quad [a;b] = [0;4]$
7. $\Phi[x] = \dfrac{1}{2 + 2x^2(t)} + t, \quad [a;b] = [-4;4]$
8. $\Phi[x] = \dfrac{\cos^2 x(t)}{3} + \sin^2 t, \quad [a;b] = [-2\pi;2\pi]$
9. $\Phi[x] = \dfrac{t^2 - 1}{2} arctg|x(t)| + t, \quad [a;b] = [-1;1]$
10. $\Phi[x] = t\sqrt{2 + |x(t)|} - t^2, \quad [a;b] = [-2;2]$
11. $\Phi[x] = t \cdot arctg|x(t)| - t^2, \quad [a;b] = \left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$
12. $\Phi[x] = \dfrac{t^2}{|x(t)| + 3} + e^{t+1}, \quad [a;b] = [-2;2]$
13. $\Phi[x] = \dfrac{\cos x(t)}{t + 2} + \sin t, \quad [a;b] = [0;3\pi]$

14. $\Phi[x]=\dfrac{1}{2+x^2(t)}-\sqrt{t},\quad [a;b]=[0;1]$

15. $\Phi[x]=\sin^2\dfrac{x(t)}{\pi}+\cos t,\quad [a;b]=[-4\pi;4\pi]$

16. $\Phi[x]=t\cdot\sqrt[4]{1+|x(t)|}+t^2,\quad [a;b]=[-3;3]$

17. $\Phi[x]=\sin\dfrac{x(t)}{t}-t,\quad [a;b]=[\pi;3\pi]$

18. $\Phi[x]=\dfrac{2t-3}{|x(t)|+t}+\sqrt{t},\quad [a;b]=[2;3]$

19. $\Phi[x]=\dfrac{3}{4}arctg|x(t)|-t+1,\quad [a;b]=[-2;2]$

20. $\Phi[x]=\dfrac{t}{t+|x(t)|}+4t,\quad [a;b]=[3;8]$

Образец решения

$$\Phi[x]=\frac{3-t^2}{2+|x(t)|}-\arcsin t,\quad [a;b]=[-1;1].$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов, изложенную в §4, §5 конспекта лекций. Докажем, что оператор $\Phi: C[-1;1]\to C[-1;1]$ сжимающий.

А. Обратимся непосредственно к определению сжимающего оператора (см. конспект лекций, § 4, пункт 4.1).

$$\rho_{C[-1;1]}(\Phi[x],\Phi[y]) \;=\; \max_{t\in[-1;1]}\left|\,\Phi[x]-\Phi[y]\right| \;=$$

$$=\;\max_{t\in[-1;1]}\left|\frac{3-t^2}{2+|x(t)|}-\frac{3-t^2}{2+|y(t)|}\right| \;=\; \max_{t\in[-1;1]}\frac{(3-t^2)\cdot\left|\,|x(t)|-|y(t)|\,\right|}{(2+|x(t)|)(2+|y(t)|)} \;\le$$

$$\le\; \max_{t\in[-1;1]}(3-t^2)\cdot\max_{t\in[-1;1]}\frac{1}{(2+|x(t)|)(2+|y(t)|)}\cdot\max_{t\in[-1;1]}|x(t)-y(t)| \;\le\; \frac{3}{4}\rho_{C[-1;1]}(x,y).$$

В этой цепочке соотношений использовали неравенства $\left|\,|a|-|b|\,\right|\le|a-b|$, $\dfrac{1}{(2+|a|)(2+|b|)}\le\dfrac{1}{4}$.

В итоге, получаем оценку

$$\rho_{C[-1;1]}(\Phi[x],\Phi[y]) \;\le\; \frac{3}{4}\rho_{C[-1;1]}(x,y).$$

Приходим к выводу, что оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha=\dfrac{3}{4}$.

В. Обратимся к достаточному признаку сжимающего оператора в пространстве непрерывных функций (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.3).

Обозначим $\Phi[x]=\varphi(t,|x(t)|)$, где $\varphi(t,u)=\dfrac{3-t^2}{2+u}-\arcsin t$. Очевидно, что функция двух переменных $\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $[-1;1]\times[0;+\infty)$, непрерывно дифференцируема по переменной u, причем при всех $(t,u)\in[-1;1]\times[0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|\varphi'_u(t,u)| \;=\; \frac{3-t^2}{(2+u)^2} \;\le\; \frac{3}{4} \;<\; 1.$$

Значит, оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \frac{3}{4}$.

18. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$.

A. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[a;b]$.

B. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0.01$, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения.

Для вычислений и построения графика использовать математические пакеты.

1. $x(t) = \dfrac{2}{\exp(1+|x(t)|)} + \cos 2t, \quad [a;b] = [-5;5]$
2. $x(t) - \dfrac{t^2}{|x(t)|+3} = \sin 4t, \quad [a;b] = \left[-\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right]$
3. $\dfrac{t}{2}\sqrt{1+x^2(t)} - x(t) = \cos 10t, \quad [a;b] = [-1;1]$
4. $\dfrac{t^2-1}{2} arctg|x(t)| + t = x(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$
5. $x(t) - \sin^2\dfrac{x(t)}{\pi} = t, \quad [a;b] = [-4\pi;4\pi]$
6. $t^2\cos\dfrac{x(t)}{2\pi} = \sin 7t + x(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
7. $\dfrac{4\sin x(t)}{t+5} - t = x(t), \quad [a;b] = [0;7]$
8. $x(t) - \dfrac{2}{x^2(t)+2} = t, \quad [a;b] = [-2;2]$
9. $x(t) + t\cos\dfrac{x(t)}{5} = \cos 4t, \quad [a;b] = [-\pi;\pi]$
10. $\dfrac{3}{4} arctg|x(t)| - x(t) = t+1, \quad [a;b] = [-2;2]$
11. $x(t) - (t+1)\cos\dfrac{x(t)}{6} = \sin 3t, \quad [a;b] = [-\pi;\pi]$
12. $\dfrac{3}{4}\exp(-|x(t)|) + \cos t = x(t), \quad [a;b] = [-5;5]$
13. $t^2\sin\dfrac{x(t)}{5\pi} + \cos 5t = x(t), \quad [a;b] = [-\pi;\pi]$
14. $x(t) + 3\sqrt[4]{1+|x(t)|} = \sqrt{t+1}, \quad [a;b] = [-1;15]$
15. $\dfrac{t}{|x(t)|+1} - \sin 15t = x(t), \quad [a;b] = \left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right]$
16. $x(t) - \cos 6t = \dfrac{t^2+1}{2+|x(t)|}, \quad [a;b] = [-1;1]$

17. $\sqrt{t} - x(t) = \dfrac{6}{|x(t)|+3}, \quad [a;b] = [0;8]$

18. $t \cdot arctg|x(t)| + x(t) = t^2, \quad [a;b] = \left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$

19. $t\sqrt{2+|x(t)|} = t^2 + x(t), \quad [a;b] = [-1;2]$

20. $\dfrac{\cos x(t)}{t+2} + \sin^2 t = x(t), \quad [a;b] = [0;13]$

Образец решения

$$x(t) + t^2 = \frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|}, \quad [a;b] = [-3;3]$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

A. Используя принцип сжимающих операторов, докажем, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[-3;3]$.

Представим уравнение следующим образом:

$$\frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|} - t^2 = x(t). \tag{1}$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi : C[-3;3] \to C[-3;3], \quad \Phi[x] = \frac{7}{4}\sqrt{1+|x(t)|} - t^2.$$

Уравнение (1) имеет вид $\Phi[x] = x$, его решение – неподвижная точка оператора Φ.
Докажем, что оператор Φ сжимающий, используя достаточный признак (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.3). Обозначим $\Phi[x] = \varphi(t, |x(t)|)$, где $\varphi(t,u) = \frac{7}{4}\sqrt{1+u} - t^2$. Очевидно, что функция двух переменных $\varphi(t,u)$ непрерывна на множестве $[-3;3]\times[0;+\infty)$, непрерывно дифференцируема по переменной u, причем при всех $(t,u) \in [-3;3]\times[0;+\infty)$ справедлива оценка

$$|\varphi'_u(t,u)| = \frac{7}{8\sqrt{1+u}} \le \frac{7}{8} < 1.$$

Отсюда следует, что оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \frac{7}{8}$. Согласно принципу сжимающих операторов Φ имеет единственную неподвижную точку $x(t) \in C[-3;3]$, которая и является решением уравнения (1).

B. Методом простых итераций найдем приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon = 0.01$ *и построим его график. Процесс вычислений организуем с помощью априорной оценки числа итераций.*

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n = \Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+|x_{n-1}(t)|}-t^2. \qquad (2)$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t)=-t^2$, и вычисляем первую итерацию $x_1(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr}=\left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_{C[-3;3]}(x_0,x_1)}\right]+1.$$

В данном случае

$$\varepsilon=0.01,\quad \alpha=\frac{7}{8},$$

$$\rho_{C[-3;3]}(x_0,x_1) = \max_{t\in[-3;3]}|x_0(t)-x_1(t)| =$$

$$= \frac{7}{4}\max_{t\in[-3;3]}\sqrt{1+t^2} = \frac{7\sqrt{10}}{4}.$$

Отсюда $N_{apr}=63$. Следовательно, для вычисления приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon=0.01$ достаточно провести 63 итерации:

$$x_1(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2,$$

$$x_2(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2\right|}-t^2,$$

$$x_3(t)=\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+\left|\frac{7}{4}\sqrt{1+t^2}-t^2\right|}-t^2\right|}-t^2 \text{ и т.д.}$$

Поскольку аналитическая запись функции $x_{63}(t)$ потребует слишком много места, то в качестве ответа построим ее график (рис. 4).

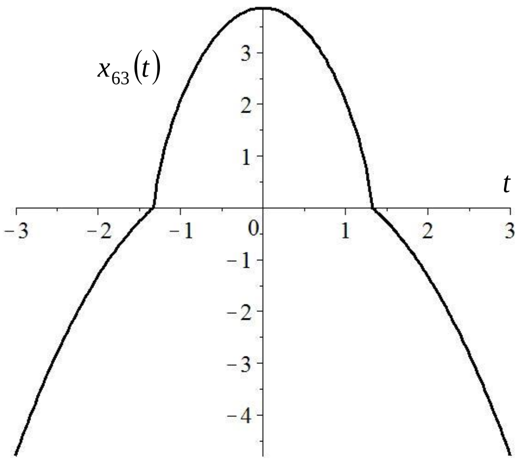

Рис. 4

19. В пространстве $C[0;1]$ дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda>0$.

A. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов.

B. Взять любое подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью ε, используя априорную оценку числа итераций.

C. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным.

Для вычислений использовать математические пакеты.

1. $x(t)=\lambda\int_0^1(1-ts)x(s)ds+t,\quad \varepsilon=10^{-3}$
2. $x(t)=\lambda\int_0^1\sin(\pi(t-s))x(s)ds+1,\quad \varepsilon=10^{-4}$
3. $x(t)=\lambda\int_0^1 tsx(s)ds+\frac{5}{6}t,\quad \varepsilon=10^{-5}$
4. $x(t)=\lambda\int_0^1(t+s)^2x(s)ds-2t^2,\quad \varepsilon=10^{-3}$
5. $x(t)=\lambda\int_0^1(t-s)x(s)ds+\frac{t}{2},\quad \varepsilon=10^{-5}$
6. $x(t)=\lambda\int_0^1\sin\frac{\pi(t+s)}{2}x(s)ds-1,\quad \varepsilon=10^{-3}$
7. $x(t)=\lambda\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds+2,\quad \varepsilon=10^{-3}$
8. $x(t)=\lambda\int_0^1(2t-s)x(s)ds+\frac{t}{4},\quad \varepsilon=10^{-4}$
9. $x(t)=\lambda\int_0^1 s\sqrt{t}x(s)ds+\sqrt{t}+1,\quad \varepsilon=10^{-2}$
10. $x(t)=\lambda\int_0^1 t^2s^2x(s)ds+t^3,\quad \varepsilon=10^{-4}$
11. $x(t)=\lambda\int_0^1 ts^2x(s)ds-t^2,\quad \varepsilon=10^{-4}$
12. $x(t)=\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds+1,\quad \varepsilon=10^{-2}$
13. $x(t)=\lambda\int_0^1(t+s)x(s)ds+t^2,\quad \varepsilon=10^{-2}$
14. $x(t)=\lambda\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds-2t,\quad \varepsilon=10^{-4}$
15. $x(t)=\lambda\int_0^1 s(t+1)x(s)ds+t^3,\quad \varepsilon=10^{-3}$
16. $x(t)=\lambda\int_0^1(\sqrt{t}-s)x(s)ds+\frac{1}{2},\quad \varepsilon=10^{-2}$
17. $x(t)=\lambda\int_0^1(s^2-t^2)x(s)ds-t,\quad \varepsilon=10^{-5}$
18. $x(t)=\lambda\int_0^1\cos\frac{\pi(t-s)}{2}x(s)ds+1,\quad \varepsilon=10^{-4}$
19. $x(t)=\lambda\int_0^1 st^2x(s)ds+t,\quad \varepsilon=10^{-3}$
20. $x(t)=\lambda\int_0^1(t^2+s)x(s)ds+\frac{t^2}{2},\quad \varepsilon=10^{-3}$

Образец решения

$$x(t)=\lambda\int_0^1(t-s^2)x(s)ds+t^3+1,\quad \varepsilon=10^{-3} \tag{1}$$

Решение этой задачи опирается на теорию сжимающих операторов и метод простых итераций, изложенные в §4, §5 конспекта лекций.

A. Найдем значения параметра λ, при которых к уравнению (1) применим принцип сжимающих операторов.

Рассмотрим интегральный оператор

$$\Phi : C[0;1]\to C[0;1],\quad \Phi[x]=\lambda\int_0^1(t-s^2)x(s)ds+t^3+1.$$

Функция $K(t,s)=\lambda\left(t-s^2\right)$ – ядро интегрального оператора. Уравнение (1) имеет вид $\Phi[x]=x$, его решение – неподвижная точка оператора Ф. Обратимся к достаточному признаку сжимающего оператора (см. конспект лекций, § 5, пункт 5.4). При условии

$$\alpha=\lambda\max_{t\in[0;1]}\int_0^1\left|t-s^2\right|ds<1 \tag{2}$$

оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия α.

Необходимо вычислить $\int_0^1\left|t-s^2\right|ds.$ Выражение $t-s^2$ при $t,s\in[0;1]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$$-1\ \le\ t-s^2\ \le\ 1,$$
$$t-s^2\ge 0 \text{ при } 0\le s\le\sqrt{t},$$
$$t-s^2<0 \text{ при } \sqrt{t}<s\le 1.$$

Тогда $\int_0^1\left|t-s^2\right|ds\ =\ \int_0^{\sqrt{t}}\left(t-s^2\right)ds+\int_{\sqrt{t}}^1\left(s^2-t\right)ds\ =\ \frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}.$

Находим максимум

$$\max_{t\in[0;1]}\left(\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Осталось выразить параметр λ из условия (2):

$$\alpha=\lambda\frac{2}{3}<1.$$

Таким образом, при $\lambda<\frac{3}{2}$ к уравнению (1) применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать метод простых итераций для поиска приближенного решения.

В. Возьмем $\lambda=\frac{1}{2}$ и методом простых итераций найдем приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, используя априорную оценку числа итераций.

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки описаны в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. При $\lambda=\frac{1}{2}$ перед нами уравнение

$$x(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t-s^2\right)x(s)ds+t^3+1. \tag{3}$$

Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n=\Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t-s^2\right)x_{n-1}(s)ds+t^3+1.$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t)\equiv 1$, и вычисляем первую итерацию $x_1(t)=t^3+\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_{\alpha} \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1)} \right] + 1.$$

В данном случае

$$\varepsilon = 10^{-3}, \quad \alpha = \lambda \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1) = \max_{t \in [0;1]} |x_0(t) - x_1(t)| = \max_{t \in [0;1]} \left| t^3 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{6} \right| = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $N_{apr} = 7$. Следовательно, для вычисления приближенного решения уравнения (3) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ достаточно провести 7 итераций:

$$x_1(t) = t^3 + \frac{1}{2} t + \frac{5}{6},$$

$$x_2(t) = t^3 + \frac{2}{3} t + \frac{103}{144},$$

$$x_3(t) = t^3 + \frac{187}{288} t + \frac{617}{864},$$

$$\ldots$$

$$x_7(t) = t^3 + \frac{3848611}{5971968} t + \frac{25679455}{35831808}.$$

C. Найдем точное решение уравнения (3) и сравним его с приближенным.

Как отмечено в конспекте лекций, § 5, пункт 5.4, для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром есть возможность найти точное решение. Уравнение (3) представим в форме

$$x(t) = t^3 + \frac{t}{2} \int_0^1 x(s) ds + 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 x(s) ds.$$

Отсюда ясно, что решение имеет вид

$$x(t) = t^3 + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in R, \tag{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x(s) ds, \quad c_2 = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 x(s) ds. \tag{5}$$

Чтобы найти значения коэффициентов c_1 и c_2, подставим представление (4) в формулы для коэффициентов (5):

$$c_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(s^3 + c_1 s + c_2 \right) ds, \quad c_2 = 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \left(s^3 + c_1 s + c_2 \right) ds.$$

После вычисления интегралов необходимо решить систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{c_1}{4} + \dfrac{c_2}{2}, \\ c_2 = \dfrac{11}{12} - \dfrac{c_1}{8} - \dfrac{c_2}{6}. \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = \frac{29}{45}, c_2 = \frac{43}{60}.$$

Итак, получили точное решение уравнения (3):

$$x(t) = t^3 + \frac{29}{45} t + \frac{43}{60}.$$

Сравним его с приближенным решением $x_7(t)$ в метрике пространства $C[0;1]$:

$$\rho_{C[0;1]}(x, x_7) \ = \ \max_{t\in[0;1]}|x(t) - x_7(t)| \ = \ \frac{49}{35831808} \ \approx \ 0.0000014 < \ 10^{-3}.$$

Таким образом, приближенное решение обладает требуемой точностью.

20. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

А. Найти точное решение задачи Коши.

В. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному.

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

1. $x' = x\cos t - \frac{1}{2}\sin 2t, \quad x(\pi) = -1$
2. $x' - x\sin t = \sin^3 t, \quad x(0) = e$
3. $x' + x = 2e^{-t}\cos 4t, \quad x(0) = 0$
4. $\frac{x'}{\cos t} - x = \cos^2 t, \quad x(\pi) = -1$
5. $x' = (2 + x)\cos t, \quad x(0) = 1$
6. $x' + x = t\sin^2 t, \quad x(0) = 3$
7. $x' = (x + 3\sin t)\cos t, \quad x(0) = 3$
8. $x' + x = t\cos t, \quad x(0) = 0$
9. $x' = (1 + x)\sin t, \quad x(0) = \frac{1}{e} - 1$
10. $x' - x\sin t = \sin 2t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
11. $x' + x = 1 + t\cos t, \quad x(-\pi) = 1$
12. $x' + 2x = e^t\sin t, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
13. $x' - x\cos t = \cos^3 t, \quad x(0) = -1$
14. $x' + x = t\sin t, \quad x(0) = -2$
15. $x' + (x+1)\sin t = \sin t\cos^2 t, \quad x(\pi) = -\frac{2}{e}$
16. $x' + (x + \sin^2 t)\sin t = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
17. $x' - x\cos t = -\sin 2t, \quad x(0) = 3$
18. $x' + 2x = t\sin t, \quad x(0) = 4$
19. $x' = (x - \sin t)\cos t, \quad x(0) = 2$
20. $x' + x = t\cos^2 t, \quad x(0) = 0$

Образец решения

$$x' = x\cos t + \sin 2t, \quad x(0) = -1 \tag{1}$$

А. Найдем точное решение задачи Коши (1).

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть решено методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = e^{\sin t} - 2 - 2\sin t.$$

В. Преобразуем задачу Коши (1) к интегральному уравнению Вольтерры и применим к нему метод простых итераций для нахождения приближенных решений.

Порядок и цель преобразований изложены в конспекте лекций, §5, пункт 5.5.
Задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = -1 + \int_0^t (x(s)\cos s + \sin 2s)ds.$$

После упрощения получаем уравнение следующего вида:

$$x(t)=\underbrace{\int_0^t \cos s\cdot x(s)ds-\frac{1}{2}(1+\cos 2t)}_{\Phi[x]} \quad\Leftrightarrow\quad \Phi[x]=x.$$

К интегральному уравнению Вольтерры может быть применен метод простых итераций, схема действия которого описана в конспекте лекций, §4, пункт 4.2. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задается рекуррентной формулой $x_n=\Phi[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t)=\int_0^t \cos s\cdot x_{n-1}(s)ds-\frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Выберем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t)=t$. Тогда

$$x_1(t)=-\frac{3}{2}+\cos t+t\sin t-\frac{1}{2}\cos 2t,$$

$$x_2(t)=-\frac{1}{2}+\frac{t}{2}-\frac{7}{4}\sin t+\frac{3}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{12}\sin 3t \quad \text{и т.д..}$$

Формулы следующих итераций слишком громоздки, поэтому в качестве ответа построим графики точного решения и нескольких приближений. На каждом из рисунков 5 – 7 изображены график точного решения x и график одного из приближений x_n (пунктиром): x_5 (рис. 5), x_6 (рис. 6), x_7 (рис. 7).

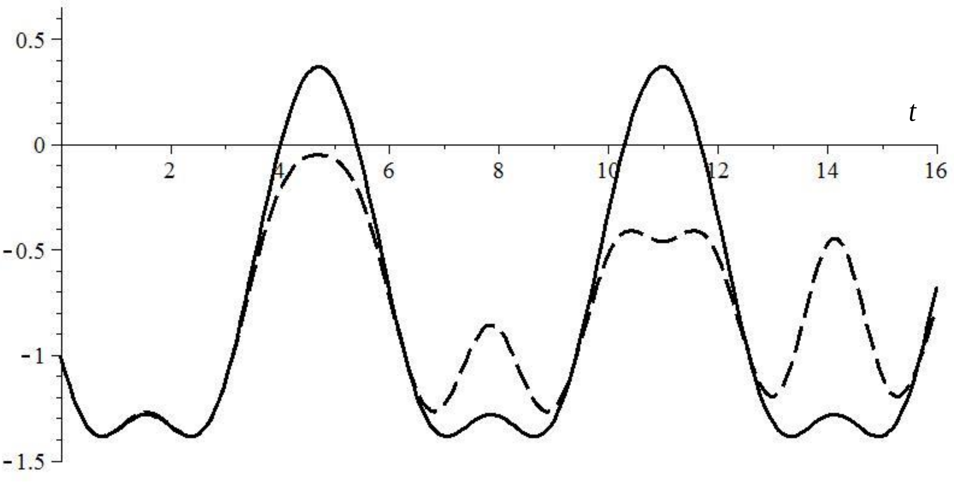

Рис. 5

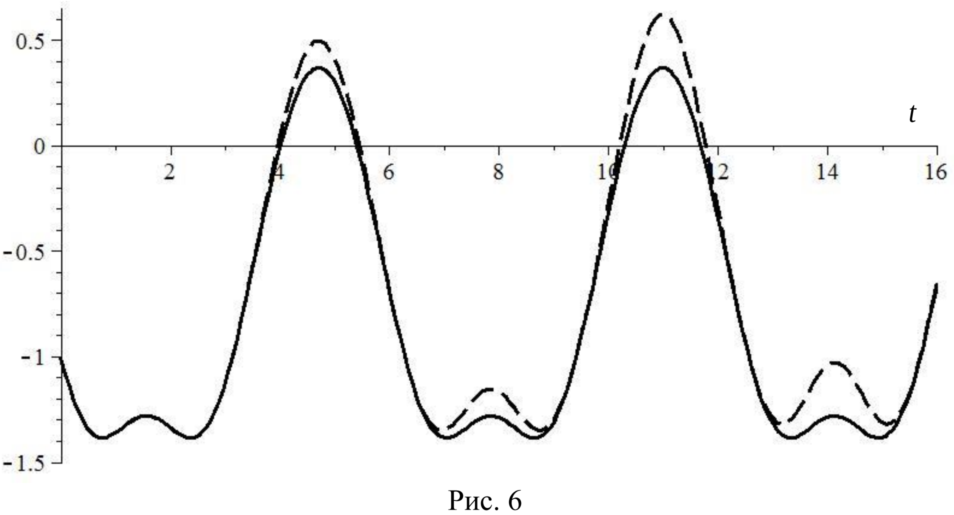

Рис. 6

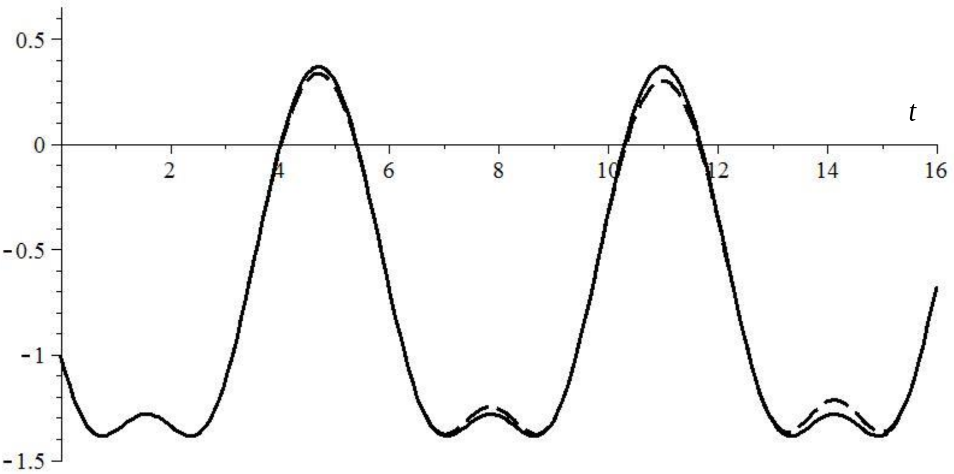

Рис. 7

Промежуток $[0;16]$ для построения графиков и порядки приближений выбраны так, чтобы наиболее наглядно проявилась сходимость приближенных решений к точному решению.