

## Раздел 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

\*\*\*\*\*

**А. Общая характеристика раздела.** В разделе углубляются школьные знания о производной, выводятся формулы дифференцирования, изучаются свойства дифференцируемых функций одной переменной. Устанавливается связь производной с физическими задачами. Рассматриваются приложения производной к исследованию функций, к построению графиков функций, к решению физических задач.

### Часть 1. Производная и дифференциал

**А1. Темы раздела (часть 1).** 1. Задачи, приводящие к понятию производной. 2. Производная; общие правила её отыскания; свойства. 3. Производные основных элементарных функций. 4. Производные функций, заданных неявно. 5. Производные функций, заданных параметрически. 6. Дифференциал; связь с производной. 7. Производные и дифференциалы высших порядков.

**А2. Базисные понятия.** 1. Производная. 2. Дифференциал.

**А3. Основные задачи.** 1. Отыскание производной 1-го и высших порядков функций, заданных явно, неявно, параметрически. 2. Отыскание дифференциала 1-го и высших порядков явно заданных функций. 3. Приложение производных и дифференциалов к задачам физики, геометрии, приближённым вычислениям.

**А4. Базисные методы решения основных задач.** 1. Применение таблицы производных и общих правил их отыскания. 2. Применение таблицы дифференциалов и правил их отыскания.

### В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

#### **В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок**

1. Определение производной; физический и геометрический смысл.
2. Таблица производных основных элементарных функций и общих правил их отыскания.
3. Правила и формулы для производных функций, заданных неявно и параметрически.
4. Определение дифференциала; связь с приращением функции и производной. Понятие дифференцируемой функции.
5. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
6. Таблица дифференциалов.

7. Геометрический смысл дифференциала.
8. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
9. Определения производных и дифференциалов высших порядков; связь между ними.
- 10\*. Формула Лейбница для  $n$ -й производной произведения двух функций.

### **В2. Знания на уровне доказательств и выводов**

1. Производные основных элементарных функций и общие правила отыскания производных.
2. Производные 1-го и высших порядков функций, заданных параметрически.
3. Теорема о связи дифференциала и производной.
4. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.
5. Формула для выражения дифференциала  $n$ -го порядка через производную  $n$ -го порядка.
6. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка.
7. Геометрический смысл производной и дифференциала.
8. Уравнение касательной к кривой.

### **В3. Умения в решении задач**

*Студент должен уметь:*

1. Находить производные сложных функций, заданных явно.
2. Находить производные функций, заданных неявно и параметрически.
3. Находить дифференциалы сложных функций.
4. Находить производные и дифференциалы высших порядков.
5. Решать задачи с использованием физического и геометрического смысла производной.

### **С. Образцы зачётных (экзаменационных) задач**

- 1.1. Найдите  $y'$ , если  $y = 2^{\operatorname{tg}(1/x)} + e^{\sin x^2} \operatorname{arctg}(x^3 + 1)$ .
- 1.2. Найдите дифференциал функции:
  - а)  $y = \sqrt[4]{(x+1)^3}$ ;    б)  $y = \operatorname{cosh} x$ .
- 1.3. Вычислите приближённо с помощью дифференциала:
  - а)  $\sqrt[3]{x}$ ,  $x = 7,76$ ;    б)  $\sqrt{1+x+\sin x}$ ,  $x = 0,01$ .
- 1.4. Найдите  $dz$ , если  $z = x^2 e^{-x}$ .
- 1.5. Найдите  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , если  $x = \operatorname{sect}$ ,  $y = \operatorname{tgt}$ .
- 1.6. Найдите производные функций, заданных неявно и параметрически ( $y''_{x^2}$ ):
  - а)  $y = \operatorname{tg}(x+y)$ ;    б)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .
- 1.7\*. Найдите производную  $n$ -го порядка функции  $y = x \ln x$ .

- 1.8. Найдите углы, под которыми пересекаются линии  $x^2 + y^2 = 8$ ,  $y^2 = 2x$ .
- 1.9. Точка движется прямолинейно, причем  $s = \sqrt{t}$ . Докажите, что движение замедленное и что ускорение  $a$  пропорционально кубу скорости  $v$ .

## **Часть 2. Приложения производной**

---

**A1. Темы раздела (часть 2).** 1. Теоремы о среднем. 2. Раскрытие неопределённостей. 3. Формула Тейлора. 4. Исследование функций и построение графиков. 5\*. Приближённое вычисление корней функции.

**A2. Базисные понятия.** 1. Возрастание и убывание функции. 2. Локальный экстремум функции. 3. Точки перегиба графика. 4. Асимптоты графика. 5. Аппроксимация функций.

**A3. Основные задачи.** 1. Исследование функций. 2. Построение графиков. 3. Получение приближённых формул для функций. 4\*. Приближённое отыскание корней функций. 5. Вычисление пределов.

**A4. Базисные методы решения основных задач.** 1. Правило Лопиталю вычисления пределов. 2. Дифференцирование функций с последующим анализом знаков первой и второй производных при отыскании экстремумов и точек перегиба. 3. Использование формулы Тейлора и канонических разложений основных элементарных функций для получения аппроксимационных формул. 4\*. Метод половинного деления для приближённого вычисления корней функций.

### **В. Знания и умения, которыми должен владеть студент**

#### **В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок**

1. Формула Лагранжа. Различные ее модификации.
2. Правило Лопиталю раскрытия неопределённостей.
3. Формула Тейлора в различных модификациях.
4. Определение возрастания, убывания функции на интервале.
5. Определение экстремумов функции.
6. Правило отыскания экстремумов функций.
7. Правило отыскания наибольших и наименьших значений функции на замкнутом промежутке.
8. Определение направления выпуклости, точек перегиба графика функции.
9. Правило отыскания точек перегиба графика функции.
10. Определения и правило отыскания вертикальных, горизонтальных, наклонных асимптот графика функции.
11. Схема построения графика функции.
- 12\*. Метод половинного деления для приближённого вычисления корней

функций.

## **В2. Знания на уровне доказательств и выводов**

1. Теоремы Ферма, Ролля, Коши.
2. Правило Лопиталья (частный случай  $\frac{0}{0}$ ).
3. Достаточные условия возрастания (убывания) функции на интервале.
4. Необходимые и достаточные условия экстремума по первой и второй производной.
5. Достаточные условия выпуклости графика функции вверх (вниз) на интервале.
6. Формулы для нахождения наклонных асимптот графика функции.

## **В3. Умения в решении задач**

*Студент должен уметь:*

1. Вычислять различного рода пределы при помощи правила Лопиталья.
2. Использовать формулу Тейлора для получения аппроксимационных формул.
3. Определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума.
4. Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
5. Находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции и точки перегиба.
6. Находить асимптоты графика функции.
7. Строить графики функций.
- 8\*. Приблизённо находить корни функции.

## **С. Образцы зачётных (экзаменационных) задач**

2.1. Вычислите, используя правило Лопиталья:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{4+\ln x}}$ ;    в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right)$ .

2.2. Получите приближённую формулу (ограничиваясь членами порядка  $x$ ) для функций:

а)  $y = \sqrt{1+x}$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $|x| < 1$ ;    б)  $y = \ln(1+3x)$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $|x| < 1/3$ .

2.3. Какой из конусов, описанных около данного шара радиуса  $R$ , имеет наименьший объём?

2.4. Исследуйте функции и постройте их графики:

а)  $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$ ;    б)  $y = \frac{x}{x^2-4}$ ;    в)  $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ ;    г)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ .