

Раздел 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть 1. Неопределенный интеграл

А. Общая характеристика раздела. В разделе изучаются методы интегрирования.

А1. Темы раздела. 1. Неопределённый интеграл. 2. Основные методы интегрирования. 3. Интегрирование рациональных дробей. 4. Некоторые классы интегрируемых в конечном виде функций.

А2. Базисные понятия. 1. Первообразная. 2. Неопределенный интеграл. 3. Неберущийся интеграл.

А3. Основная задача. 1. Нахождение неопределённого интеграла.

А4. Базисные методы решения основной задачи. 1. Непосредственное интегрирование. (Применение свойства линейности, подведение множителя под дифференциал). 2. Замена переменной. 3. Интегрирование по частям. 4. Разложение рациональной дроби на целую часть и элементарные дроби.

В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Первообразная.
2. Неопределённый интеграл, свойства.
3. Таблица неопределённых интегралов.
4. Интегрирование функций $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.
5. Интегрирование по частям. Некоторые классы функций, интегрируемых по частям.
6. Интегрирование простейших элементарных дробей.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование функций $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $R(\sin x, \cos x)$.
- 9*. Интеграл от дифференциального бинома.
10. Определение неберущегося интеграла. Примеры.

В2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Свойства неопределённого интеграла.
2. Теорема о замене переменной.
3. Формула интегрирования по частям.

В3. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Сводить интегралы к табличным с помощью свойства линейности и подведением под знак дифференциала.
2. Подбирать нужную замену переменной в интегралах известных типов.
3. Интегрировать простейшие рациональные и иррациональные выражения, содержащие квадратный трехчлен.
4. Интегрировать по частям. Знать классы функций, интегрируемых по частям.
5. Интегрировать рациональные дроби.
6. Сводить интегралы от некоторых иррациональных выражений к интегралам от рациональных функций.
7. Интегрировать простейшие тригонометрические функции и функции вида $R(\sin x, \cos x)$, $R(\operatorname{tg} x)$.

С. Образцы зачётных (экзаменационных) задач

Найдите неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$;
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$;
3. $\int x \sin(3x+5)dx$;
4. $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$;
5. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;
7. $\int \frac{(x^3-1)dx}{4x^3-x}$;
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$;
9. $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$;
10. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;
11. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;
12. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;
13. $\int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$;
4. $\int \sqrt{2+3x-2x^2} \cdot dx$;
15. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;
16. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;
17. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;
18. $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

Часть 2. Определённый интеграл и его приложения

А. Общая характеристика раздела. В теории определённого интеграла используются понятия и методы неопределённого интегрирования, хотя сама теория сначала развивается независимо. Её элементы даются в школьном курсе. Приложения касаются геометрических, физических и экономических задач.

А1. Темы раздела. 1. Определённый интеграл. 2. Приложения определённого интеграла. 3. Понятие о несобственных интегралах. 4. Понятие о приближённых методах вычисления определённых интегралов.

A2. Базисные понятия. 1. Интегральная сумма по отрезку.
2. Определённый интеграл как предел последовательности интегральных сумм. 3. Несобственные интегралы.

A3. Основные задачи. 1. Вычисление определённых интегралов. 2. Исследование сходимости и вычисление несобственных интегралов.
3. Вычисление аддитивных величин геометрического характера (площадь, объём, длина дуги). 4. Вычисление аддитивных величин механики и физики (масса, заряд, работа, давление, статические моменты и моменты инерции), нахождение координат центра масс.

A4. Базисные методы решения основных задач. 1. Использование формулы Ньютона-Лейбница. 2. Интегрирование подстановкой.
3. Интегрирование по частям. 4. Приближённые методы – формула трапеций.

В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции.
2. Определённый интеграл (по Риману) как предел интегральных сумм. Достаточные условия существования определённого интеграла.
3. Свойства определённого интеграла. Теорема о среднем.
4. Интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность, дифференцируемость.
5. Определение и вычисление длины дуги плоской кривой (в декартовых, полярных координатах, при параметрическом задании).
6. Технология сведения геометрических и физических задач вычисления аддитивных величин к определённому интегралу. Вычисление площадей, масс, координат центров масс плоских областей. Нахождение длин дуг плоских кривых, вычисление аддитивных величин физики и механики (путь, работа, энергия, масса, заряд, давление, статические моменты, моменты инерции и т.п.).
7. Несобственные интегралы 1-го и 2-го родов. Сходимость интеграла. Распространение на эти интегралы формулы Ньютона-Лейбница, методов интегрирования подстановкой и по частям.

В2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Теорема о замене переменной в определённом интеграле.
2. Формула интегрирования по частям.
3. Необходимое условие существования определённого интеграла.
4. Свойства определённого интеграла (выборочно).
5. Теорема о среднем.
6. Производная интеграла с переменным верхним пределом.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Вычисление длины дуги плоской кривой.

9. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений, нахождение объёмов тел вращения.

В3. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Вычислять простые определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница, замену переменной, формулу интегрирования по частям.
2. Вычислять по определению или устанавливать сходимость (расходимость) несобственных интегралов.
3. Строить и использовать формулы для нахождения площадей, масс, координат центров масс, моментов инерции плоских областей, длин дуг плоских кривых, а также физических величин (работа, давление и т.п.).

С. Образцы зачётных (экзаменационных) задач

1. Найдите определённые интегралы:

а) $\int_0^x (4 - 3x)e^{-3x} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx$; в) $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; г) $\int_1^2 \frac{(1 + \ln x)dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = (x - 2)^2$, $y = 4x - 8$; б) $r = 4 \cos 3\varphi$, $r = 2$ ($r \leq 2$).

3. Вычислите объём тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной дугами парабол $y^2 = x$, $x^2 = y$.

4. Найдите массу круглой пластины радиуса R с центром в начале координат,

если поверхностная плотность $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Найдите длину дуги кривой $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

6. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

7. Вычислите работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой H , имеющий в основании круг радиуса R ($H = 5$ м, $R = 3$ м).

8. Вычислите или установите расходимость несобственных интегралов:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x - 1}$; в) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$