Раздел 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

****

А. Общая характеристика раздела. Раздел является продолжением и развитием дифференциального исчисления функций одной переменной. Большинство вопросов решается аналогично.

***А1. Темы раздела*.** **1.** Точечные множества в конечномерном пространстве. **2.** Функции нескольких переменных. **3.** Предел. **4.** Непрерывность. **5.** Частные производные. **6.** Полный дифференциал. **7.** Производные сложной функции. **8.** Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. **9.** Неявные функции и их производные. **10.** Экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции. **11*.** Геометрические приложения.

А2. Базисные понятия*.** **1.** ***n-мерная точка и ***n***-мерное пространство. **2.** Функция многих переменных как функция точки. **3.** Предел, непрерывность функции многих переменных. **4.** Частная производная. **5.** Полный дифференциал. **6.** Экстремум. **7.** Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве. **8*.** Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

***А3. Основные задачи*.** **1.** Отыскание области определения функции нескольких переменных. **2.** Отыскание частных производных и полных дифференциалов первого и высших порядков явно заданных функций. **3.** Отыскание производных и дифференциалов сложных и неявных функций. **4.** Отыскание экстремумов, наибольших и наименьших значений функций.

***А4. Базисные методы решения основных задач*.** **1.** Применение таблицы производных для функций одной переменной. **2.** Применение таблицы дифференциалов. **3.** Применение общих формул для отыскания производных сложных и неявных функций. **4.** Применение общих формул для отыскания производных и дифференциалов высших порядков. **5.** Применение правила отыскания экстремумов. **6.** Применение правила отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области. **7.** Метод Лагранжа отыскания условного экстремума.

В. Знания и умения, которыми должен владеть студент

В1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. n-мерная точка. Евклидово n-мерное пространство. Классификация множеств в n-мерном евклидовом пространстве.

2. Функция нескольких числовых аргументов. Область определения; множество значений; способы задания. Сложная функция многих

аргументов. Неявная функция нескольких аргументов..

3.Различные определения предела функции многих аргументов в точке. Свойства предела. Непрерывность. Различные определения непрерывности функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций.

4.Частное приращение и частная производная функции. Частные производные высших порядков. Производные сложных функций. Производные неявных функций Геометрический смысл частных производных функции двух аргументов.

5. Полное приращение и полный дифференциал функции; его выражение через частные производные. Дифференцируемость функции. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух аргументов. Формула Тейлора в дифференциальной форме с асимптотическим остаточным членом.

6.Экстремум функции нескольких аргументов. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум.

7.Наибольшее и наименьшее значения функции. Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области.

8*. Геометрические приложения. Касательная прямая к пространственной кривой. Определения касательной плоскости и нормали к поверхности. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности. Вектор нормали к поверхности.

<u>В2. Знания на уровне доказательств и выводов</u>

1. Формула, выражающая полный дифференциал функции двух аргументов через её частные производные.
2. Формула для производной сложной функции двух аргументов.
3. Инвариантность формы записи дифференциала первого порядка.
4. Необходимое условие экстремума.
5. Метод Лагранжа отыскания условного экстремума в простейших случаях.

6*. Вывод уравнения касательной плоскости к поверхности.

<u>В3. Умения в решении задач</u>

Студент должен уметь:

1. Находить область определения функции двух аргументов.
2. Находить частные производные 1-го и высших порядков явно заданной функции.
3. Находить производные сложных функций.
4. Находить производные неявных функций.
5. Находить полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции двух

аргументов.

6. Находить безусловные и условные экстремумы функции.
7. Находить наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

8^*. Строить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

С. Образцы задач для контрольных работ

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.
2. Найдите частные производные 2-го порядка от функции $z = \arcsin(xy)$.
3. Найдите полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков от функции $z = \ln(x - y)$.
4. Пусть $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Покажите, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
5. $z = \operatorname{arctg}(u/v)$, $u = \sin(x^2 + y^2)$, $v = \cos(x^2 - y^2)$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
6. $xyz = (x^2 + y^2 + z^2)$. Найдите dz.
7. Найдите экстремумы функции $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ в замкнутом треугольнике с вершинами $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 3)$; $z = 2x^2 + xy + y^2 - 5x - 3y + 4$.
9. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 1$ найдите точки наиболее и наименее удаленные от прямой $x + y = 5$.

10^*. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y$ в точке $M(2, 1, 4)$.